UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

PROGETTO NAZIONALE DI RICERCA (40% MPI)
"INSEGNAMENTO APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA"

Anno Accademico 1990-91

Carlo Felice Manara

LA MATEMATICA NELLA CULTURA DEI MAESTRI E L'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA ELEMENTARE

(Lettura trasversale dei nuovi programmi)

(Appunti non rivisti dall'Autore)

a cura di M. Angela May

RAPPORTO INTERNO N.2/91

Introduzione

Nell'anno 1990-91, presso il Dipartimento di Matematica, nell'ambito delle attivita' del 40% MURST e del MATCIRD dell'Universita' degli Studi di Milano, il Prof. Carlo Felice Manara ha tenuto un Corso di aggiornamento per insegnanti di Scuola Elementare.
La proposta fatta fin dall'inizio era quella di fare una lettura trasversale dei programmi, per mettere in luce le cose veramente essenziali ed importanti e per trovare un filo logico che unisse le abilita', i concetti, i procedimenti da insegnare.
Direi sinteticamente che ne e' emersa una interessante chiave interpretativa dell'insegnamento della matematica. Infatti man mano vien messa in evidenza una grande opportunita' di far crescere i bambini (ma il discorso si puo' generalizzare anche a soggetti di eta' molto piu' avanzata) nella loro capacita' razionale e nella loro personale responsabilita' a gestire il proprio lavoro. Tra le righe si puo' leggere anche una sorta di iniziazione ad apprendere come si svolge un "lavoro intellettuale", particolarmente in una disciplina caratterizzata anche dal fatto di essere espressa con un linguaggio simbolico convenzionale.

Adriana Davoli

Milano, 12.6.1991

GRUPPO LOCALE DI MILANO DEL PROGETTO NAZIONALE DI RICERCA(40% MPI)
RICERCHE TEORICHE SPERIMENTALI SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
(PROF. CARLO FELICE MANARA)

MAT-CIRD - SEZIONE MATEMATICA DEL CENTRO INTERDIPARTIMENTALE PER LA RICERCA DIDATTICA
(PROF.SSA CESARINA TIBILETTI MARCHIONNA)

LA MATEMATICA NELLA CULTURA DEI MAESTRI E L'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA ELEMENTARE

Presentazione del programma del corso di aggiornamento per l'anno 1990-1991

Lettura dei programmi per la scuola elementare alla luce della valenza educativa dell'insegnamento della matematica.

Quest'anno proponiamo una serie di incontri con il Prof. C.F. Manara per discutere una linea educativa alla razionalita', usando anche un testo di riferimento che possa venire personalmente meditato da ciascuno.
Si pensa innanzi tutto di aiutare l'insegnante a far proprio l'atteggiamento culturale che suggeriamo, in modo da consentirgli una reale coscienza ed autonomia.

Riferimento Bibliografico:
C.F. Manara, "Problemi di didattica della matematica", Ed. La Scuola, Brescia, 1989.

Temi e Date:
1) Cap. VI: "Ragionamento, Dimostrazione, Verifica"
   22/10, 5/11, 19/11
2) Cap. III: "I numeri naturali: aspetto ordinale e cardinale"
   3/12, 14/1, 28/1
3) Cap. V: "Grandezze e misure"
   11/2, 25/2, 11/3
4) Cap. I: "Epistemologia della matematica" e
   Cap. IV: "Fondamenti di geometria. Le Trasformazioni"
   25/3, 8/4, 22/4
5) Cap. II: "Genesi dei concetti matematici e questioni generali di didattica"
   6/5, 20/5

Tra i riferimenti bibliografici sono da considerare anche:
- Programmi ministeriali pubblicati con D.P.R. 12/2/85;
- Altri documenti che verranno indicati nel corso dell'anno.

Luogo e orario degli incontri:
- Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Universita' degli Studi di Milano, Via Saldini 50; aula n. 7.
- dalle ore 17 alle ore 19.

Consigli:
- Si raccomanda la partecipazione a tutti gli incontri, poiche' lo studio di ciascun capitolo della materia consentira' di far emergere via via sempre piu' chiaramente quale sia la trama di pensiero che li sottende tutti.
  Inoltre verra' colta ogni occasione per confrontare questa impostazione culturale anche con le scelte didattiche, fino ad affrontare anche le questioni relative alle difficolta' piu' frequenti degli allievi ed ai motivi di eventuali insuccessi.
  Riguardo all'ultimo punto su esposto, in continuita' con le attivita' degli anni scorsi, verranno approfonditi i vari spunti che emergeranno, verranno discusse e messe alla prova le eventuali proposte concrete, per proseguire la ricerca nell'ambito della didattica della matematica, in diretta collaborazione con i partecipanti.

Discussione del programma proposto

I PARTE

Date: 22/10, 5/11, 19/11

Argomento: CAPITOLO SESTO "Ragionamento, Dimostrazione, Verifica"

Commento
Il capitolo in oggetto si apre riaffermando ancora una volta che il valore formativo dell'insegnamento della matematica consiste nel confermare e precisare nel discente un'attivita' tipicamente umana: la capacita' di "ragionare".
Questa capacita' conduce a fare delle deduzioni logiche a partire da premesse date come vere, attraverso delle procedure che sono state studiate fin dall'antichita' in una dottrina che prende il nome di LOGICA.
Poiche' all'insegnante si chiede di esercitare gli alunni ad allenarsi in tale capacita', non sembra fuori luogo proporgli di vedere piu' da vicino che cosa si studia nel capitolo che prende il nome di LOGICA, che cosa e' una definizione, che differenza c'e' tra dimostrazione e verifica, quali sono le possibili procedure per risolvere un problema, ecc. Si tratta di argomenti che stanno alla base di tutti i capitoli che riguardano l'insegnamento della matematica.
Si noti bene che, anche se e' stato introdotto nei nuovi programmi un capitolo denominato "logica", non intendiamo che venga portato in classe quello che deve conoscere l'insegnante. Non diversamente l'insegnante di ginnastica deve saperne di anatomia e di fisiologia, per far esercitare agli alunni i muscoli giusti nel modo piu' adeguato, ma non deve necessariamente insegnare a loro queste conoscenze.
Inoltre i contenuti indicati nei nuovi programmi possono indurre a ritenere che lo studio della logica riguardi esclusivamente le classificazioni, le seriazioni ed i connettivi logici, determinando cosi' una visione distorta e concentrata su aspetti

tecnici e poco produttivi dal punto di vista della formazione della persona.
NOTA BENE: Noi intendiamo promuovere una apertura mentale e critica; invece non ci interessa proporre in questa sede uno studio particolareggiato su questioni tecniche.

II PARTE

Date: 3/12, 14/1, 28/1

Argomento: CAPITOLO TERZO "I numeri naturali: aspetto ordinale e cardinale"

Commento
Sono tre gli aspetti che vorremmo sottolineare a proposito di questo capitolo.
Il primo riguarda la conoscenza approfondita da parte dell'insegnante degli aspetti che qualificano i numeri naturali (aspetto cardinale, ordinale, operazioni definite sull'insieme di questi numeri). Inoltre, poiche' nel seguito verranno introdotti altri enti matematici ai quali si dara' ancora il nome di numero, cercheremo di rispondere alla domanda: quali sono le caratteristiche che deve avere un nuovo oggetto di studio della matematica, per aver diritto ad essere chiamato numero? Quali sono invece le caratteristiche proprie dei numeri naturali?
Nel secondo punto verra' sottolineata la differenza esistente tra le LEGGI che hanno una validita' generale e le REGOLE che riguardano le procedure convenzionali; in altre parole verra' discussa la differente portata che hanno l'apprendimento e la manipolazione dei concetti e l'addestramento all'utilizzo corretto delle convenzioni.
Da ultimo, metteremo in luce ancora una volta che la matematica costituisce un potentissimo mezzo di conoscenza perche' ci offre, non solo strumenti di espressione e di rappresentazione, ma anche degli strumenti di previsione. Da qui potranno scaturire dei collegamenti con i discorsi fatti a proposito di "deduzione", "ragionamento", "risoluzione di problemi"; inoltre si potra' sottolineare il parallelismo (e le differenze) tra le proprieta' delle operazioni che si possono eseguire sugli insiemi e le operazioni che si definiscono sui numeri.

III PARTE

Date: 11/2, 25/2, 11/3;

Argomento: CAPITOLO QUINTO "Grandezze e misure"

Commento
In collegamento con le argomentazioni relative al numero naturale ed al concetto piu' generale di numero, in questa parte si intende affrontare una modalita' per introdurre il concetto

di numero razionale. Pertanto si avra' l'opportunita' di discutere su aspetti delicati come ad esempio: frazione intesa come "operatore" tra grandezze omogenee e frazione intesa come una delle possibili rappresentazioni del numero razionale.
Verra' introdotto il concetto di grandezza, sganciandolo da una eccessiva "geometrizzazione", alla quale forse si potrebbe attribuire la responsabilita' di indurre una "fissita' funzionale".
Ad esempio spesso i bambini confondono i concetti di area e perimetro; questa difficolta' potrebbe suggerire l'ipotesi che essa venga generata proprio quando si introducono i concetti di grandezza e di misura. Infatti frequentemente si puo' osservare che i metodi didattici usati appiattiscono questi concetti generali su quello di segmento, concentrando l'attenzione, spesso in modo esclusivo, sulla sua unita' di misura e sulle operazioni che si possono fare sull'insieme di questo tipo di grandezze.
In quest'ordine di idee sara' utile anche in questo capitolo riconoscere l'opportunita' che la matematica offre per conoscere meglio alcuni aspetti della realta' (parallelismo tra operazioni sulle grandezze e operazioni sui numeri corrispondenti alle loro misure).
Inoltre verra' discusso il valore didattico della conoscenza di alcuni concetti (ad esempio concetto di "frazioni equivalenti"), rispetto ad altri su cui non val la pena di insistere (corrispondenti a nomenclature non particolarmente utili, come nel caso di frazioni "proprie, improprie, apparenti", ecc.).

IV_PARTE

Date: 25/3, 8/4, 22/4,

Argomento: CAPITOLO PRIMO "Epistemologia della matematica"
CAPITOLO QUARTO "Fondamenti di geometria. Le trasformazioni"

Commento
Il primo capitolo ci puo' aiutare a vedere nella matematica una dottrina in evoluzione non solo a causa delle nuove acquisizioni, ma soprattutto a causa del ripensamento che ha condotto a dare un nuovo significato ai suoi oggetti di studio.
Pertanto questo capitolo e' molto importante per l'insegnante di matematica, anche se nelle elementari si occupa solo del primo apprendimento di questa materia. Infatti, benche' egli non possa insegnare tutto cio' che egli stesso conosce, tuttavia questo bagaglio culturale gli e' indispensabile per osservare e dirigere gli allievi nei loro primi passi. Questi ultimi debbono essere fatti in modo non contraddittorio rispetto ad una visione piu' vasta della materia e percio' in modo da non insinuare surretiziamente dei concetti inutili o addirittura errati. Una visione cosi' meditata evitera' di produrre alcune delle condizioni che spesso generano difficolta' anche notevoli nella futura carriera scolastica dei ragazzi.
Questo capitolo e' poi di fondamentale importanza per porre le

basi dell'insegnamento della geometria: ha senso chiedersi quale sia la geometria vera?; qual e' l'aspetto simbolico di questa materia?; che cosa significa parlare di geometria come primo capitolo della fisica?...
Queste ultime considerazioni ci condurranno a completare questo studio con la lettura del quarto capitolo sui fondamenti e sulla ricerca degli invarianti.

V_PARTE

Date: 6/5, 20/5

Argomento: CAPITOLO SECONDO "Genesi dei concetti matematici e questioni generali di didattica"

Commento
Le considerazioni di questo capitolo saranno utili per chiarire quale ruolo svolgano nella costruzione dei primi concetti matematici l'esperienza quotidiana e normale, la fantasia, il linguaggio naturale, l'esigenza di spiegare le cose che vediamo intorno a noi e quella di comunicare i nostri pensieri (e quindi di trovare adeguate forme per schematizzarli).
Inoltre risultera' molto opportuna la ricerca dei punti di contatto e delle differenze tra linguaggio naturale e linguaggio matematico.
I singoli aspetti elencati concorreranno a costituire un riferimento con il quale confrontare le scelte didattiche, senza mai dimenticare la prospettiva nella quale ci siamo messi: quella di motivare l'insegnamento della matematica soprattutto per il suo valore formativo.

22/10/90

Lettura dei programmi per la scuola elementare alla luce della valenza educativa dell'insegnamento della matematica.

I incontro col prof. Manara
(appunti non rivisti dall'autore)

Importanza delle domande, anche le piu' concrete, anche sui minimi dubbi, perche' il libro (di cui non interessa tanto il contenuto dei singoli capitoli, quanto l'impostazione generale metodologica) e' troppo stringato e manca di esempi.
Non tenere zone d'ombra, cose accettate solo sulla parola.
Faremo poche cose; io lotto infatti contro l'insegnamento di troppe cose inutili, che ingombrano i cervelli dei ragazzini: i programmi ministeriali sono troppo pieni.
L'idea di fondo di questo corso e': miriamo all'essenziale, vediamo di fare di cio' che e' scritto sui programmi una lettura trasversale, che ne tagli cioe' i sentieri, dia un'idea con cui ciascuno si costruisca un programma e una strategia didattica dipendenti dalla propria cultura e dalla classe che ha davanti; e soprattutto miri a costruire una mentalita' matematica piuttosto che singole nozioni, cioe' a capire che cosa sia la matematica, diversamente anziche' maestri o insegnanti diventiamo insaccatori. Beati i bambini, il sacco e' bucato, non resta dentro niente; quindi il nostro lavoro e' quello della botte delle Danaidi, che dovevano riempire un tino forato in fondo.
Quello che vorrei ottenesse l'insegnamento e' un'appropriazione di concetti e procedure piuttosto che di nozioni e di formule di comportamento; per questo ho raccomandato: se ci sono dubbi, ignoranze nel senso etimologico della parola, eventuali eccessivi affidamenti fatti su una cultura precedente che magari non c'e' (ma non e' un gran male) lo dicano, perche' vorrei che si potesse venire qui a lavorare insieme e non solo a fare appunti o a sentire lezioni.
Cio' premesso, possiamo iniziare. Se la scansione degli argomenti non va bene, possiamo cambiarla.
Un argomento che spaventa e' la geometria delle trasformazioni.
"Dobbiamo studiare anche una nuova geometria? C'era la geometria euclidea, poi hanno inventato quella non euclidea, ora anche la geometria delle trasformazioni!"
Non esiste la geometria delle trasformazioni! Esiste un modo nuovo di guardare la vecchia geometria tenendo presenti le trasformazioni; un modo di esplicitare le cose sempre fatte, di vederle diversamente.
Se ci sono in definitiva argomenti che vi preoccupano in modo particolare, ditelo, e per quello che saremo capaci ve li presenteremo.

-A Davoli Avevamo detto che in questo primo incontro avremmo affrontato una discussione sul ragionamento; parlando poi piu' in particolare riguardo alla matematica, la definizione, le proposizioni, di quali proposizioni si occupa la matematica.

-p.M. La tabella di marcia scelta e' una lettura trasversale del mio libro, i cui argomenti sono strutturati con la logica che avevo in mente nel momento in cui l'ho scritto. Niente di male se l'esigenza del lavoro comune ci conduce a cambiare l'ordine.
Il primo capitolo che abbiamo deciso di leggere e' quello della logica, perche' nei sussidiari e nei libri di divulgazione la l. e' trattata in un modo che puo' mettere soggezione. Allora per evitare le soggezioni e per evitare una lettura riduttiva del concetto di l. abbiamo deciso di fare un piccolo discorso sul ragionamento, perche' c'e' chi pensa che la l. sia una scoperta moderna, quasi che i nostri antenati non ragionassero; invece quando ragioniamo bene noi ragioniamo come Aristotele.
Allora quello che a me interessa e pare il compito dell'insegnamento della l. nella scuola elementare e' che non venga fatto un capitolo apposito; la mia paura e' che il maestro dica: tirate fuori il quaderno di l. che vi insegno a ragionare. Che cosa hai fatto prima d'ora se non gli hai insegnato a ragionare?
La l. e' quello che facciamo quando ragioniamo bene: la cosa piu' importante e' cercare di prendere coscienza, di analizzare quali sono le operazioni mentali che eseguiamo in questo caso.
Purtroppo in molti sussidiari la l. e' ridotta alle classificazioni, al massimo con figure stranissime tipo diagrammi ad albero o di Eulero Venn, che cadono dal cielo perche' non si capisce bene che senso abbiano.

-M.Gorla: Oppure con le domande a due risposte: vero o falso, come sul mio sussidiario le due pagine intitolate "Logica". Secondo me la l. coinvolge tutti i tipi di materie. Mi pare che nella scuola elementare non si possa dire: adesso facciamo l., ma: pensiamo con un rigore logico.

-p.M.: Questa faccenda del vero-falso mi fa pensare al quiz televisivo; e' proprio una degenerazione che solo la TV puo' permettersi. La conoscenza umana cui vogliamo dirigere i nostri ragazzini non sta nel dire: vero o falso, ma: vero perche', o falso perche'; cioe' la conoscenza umana e' conoscenza motivata dall'interno. Quand'ero ragazzino e studiavo il latino mi dicevano che intelligenza significa intus-legere: leggere dentro le cose con l'occhio della mente.
Qui c'e' il discorso di Proclo: un certo filosofo del III secolo a.C. di Alessandria d'Egitto litigava con gli Epicurei, che dicevano che la geometria e' inutile perche' insegna cose che sanno anche i somari, i quali se devono prendere il fieno fanno la strada piu' breve e non i due lati di un triangolo. Proclo rispondeva che l'uomo sa dire perche' le cose devono essere cosi', e questa e' la differenza tra la conoscenza dell'uomo e quella del somaro.
Quindi se la conoscenza deve essere un puro e semplice accumulo di informazioni, un ripetere si o no, qui il computer diventa piu' bravo di noi, perche' possiamo accumulare dentro miliardi di informazioni. La differenza e' che il computer non sa dire perche'.
Ho nel mio studio un fascicolo speditomi da un ingegnere dal titolo: "La g. fatta con il computer". Ho scritto sotto: la g. si fa con la testa, non con il computer. Il computer fara' i disegni,

ma non la g.. L'essenza della g. non e' il disegno ma il ragionamento, per cui le cose devono andare cosi'. Il perche' ad es. le tre bisettrici degli angoli di un triangolo devono passare per uno stesso punto: il computer le disegna, ma non lo dice.
Ecco perche' io penso che il discorso dell'insegnamento della matematica nella scuola elementare vada ridotto all'osso, perche' dobbiamo insegnare ai ragazzini non solo dei comportamenti, ma dobbiamo abituarli ad avere una strutturazione logica razionale dei loro comportamenti. E' questo lo scopo della matematica: cosa relativamente semplice se non ci proponiamo di insegnare loro tante cose.
La settimana scorsa il prof. Luccio diceva: se il mio calcolatore e' guasto e ho dimenticato come si fa la radice quadrata, sono infelice. Io no, perche' so che cos'e', qual'e' l'idea direttiva, quindi cerco su un libro o sulle tavole, alla peggio se sono su un'isola deserta faccio lunghi calcoli, ma riesco a ricostruire.
Se ho solo memorizzato delle regole, basta perderne una perche' tutto vada per aria.
Il discorso dell'insegnamento della matematica nella scuola elementare vorrei impostarlo su queste basi: dobbiamo si' insegnare una certa quantita' di conoscenze (una volta si diceva; a leggere, scrivere e fare di conto), ma in modo che in quelle testoline non si fissino regole appiccicate come i francobolli troppo leccati.
Conoscevo un certo Tizio che insegnava matematica in un corso di ricupero per adulti. Non sono riuscito a convincerlo a non insegnare il minimo comune multiplo. L'adulto non ha la memoria sgombra come il ragazzino, e ha gia' un certo sistema di conoscenze; se non riesce a inglobare in modo razionale e vitale nell'ambito delle sue conoscenze le cose che gli diciamo, le dimentica subito e ha ragione.
Allora cerchiamo di impostare l'insegnamento della matematica in modo che si vada almeno in questa direzione: non e' possibile spiegare tutto, questo e' chiaro; non e' possibile pretendere dai ragazzini una capacita' logica superiore a quella della loro eta'; e' possibile cercare di potare, sfrondare, tagliare magari i contenuti dei programmi in modo che quello che si insegna diventi un tutto organico impostato e radicato soprattutto nella mentalita' e nel metodo piuttosto che nelle singole conoscenze.
Il grande matematico Peano diceva che non e' necessario conoscere i teoremi di matematica superiore, basta sapere in quali libri sono scritti. Quando uno conosce una materia dall'alto, se ha bisogno di un'informazione sa dove andare a trovarla.
Il pizzicagnolo di Ramponio d'Intelvi che ha tre calcolatrici ha dimenticato come si fa l'addizione ma non il significato dell'operazione aritmetica "addizione", perche' la fa a macchina, e non sbaglia. In quella testa e' rimasto l'essenziale, anche se le modalita' concrete di esecuzione sono svanite.
Allora, torniamo alla l.: si doveva parlare del ragionamento. La mia teoria e' che non si puo'insegnare alla gente a ragionare: o ragiona o non ragiona; se uno non ragiona, non puo' seguire il ragionamento con cui gli insegno a ragionare. La sola cosa che possiamo fare, e faremo in questi incontri, e' riflettere sul nostro modo di ragionare, in modo da identificare i pilastri portanti. Per far questo non mi riferiro' alla l. simbolica ma alla l. classica, quella che gli uomini hanno sempre utilizzato prima che fosse inventata la l. simbolica; tanto piu' che per

spiegare le regole della l. simbolica dovrei servirmi del linguaggio comune.
C'e' una quantita' di termini tecnici che vengono utilizzati nel discorso comune. per es. ragionamento inverso, o ragionamento contrario, o ragionamento reciproco; c'e' una gran confusione.
Ci limiteremo a vedere che cosa voleva dire la l., e quale sia il significato del ragionamento elementare, poi casomai vedremo qualche tipo di termine tecnico, sempre nei termini della l. elementare, la dottrina che insegna a ragionare bene, cioe' a dire cose vere.
Ci possono essere due modi per pronunciare proposizioni vere: il primo modo e'quello che fa riferimento al contenuto della proposizione; per es. se dico: "Parigi e' la capitale della Francia" dico una proposizione che e' vera di fatto, in forza del suo contenuto. Chiunque puo' andare a verificare. Se dicessi: "Roma e' la capitale della Francia" direi una proposizione falsa. Qui si apre un lungo discorso, perche' il compito di tutte le scienze e' dire cose vere, cioe' cose che corrispondono alla realta', è quindi ogni scienza (storia, fisica, biologia, geografia...) ha la sua particolare metodologia per cercare di dire cose che corrispondono alla verita' dei fati; la storia ha le sue tecniche, la ricerca delle fonti, dei documenti, il confronto tra le fonti, l'analisi interna, l'analisi esterna, che sviluppa, applica e possiede per poter fare affermazioni vere su cio' che e' il passato. La fisica ha una sua tecnica diversa da quella della storia, la geografia diversa da quella della fisica. Ogni scienza per statuto fondamentale ha di dire cose che corrispondono alla realta'. Tutte queste tecniche erano dai classici raggruppate sotto la categoria della l. materiale cosiddetta, cioe' la dottrina che cerca di dire cose vere in quanto corrispondenti alla realta' esterna.
C'e' un'altra possibilita', pronunciare proposizioni vere a partire dalla forma delle proposizioni, cioe' dalla forma del discorso. Faccio un esempio. Se io dicessi:
"Pierino vince sempre al totocalcio" e poi:
"Pierino qualche volta non vince al totocalcio", ecco due proposizioni delle quali e' certo che se una e' falsa l'altra e' vera: quello che i classici chiamano proposizioni contraddittorie. Non interessa precisare quale delle due sia vera in forza del suo contenuto, ma sapere che in forza della forma che hanno se una e' vera l'altra e' falsa e viceversa.
Ecco un esempio tipico di l. formale, per cui la conclusione certa dipende dal confronto della forma esterna delle proposizioni con altre. Se io dicessi: "Tutti i Milanesi sono biondi" e "Qualche Milanese non e' biondo", ecco altre due proposizioni contraddittorie; non so quale sia vera, ma so che se una e' vera l'altra e' falsa. Qui cominciamo a navigare verso altre acque, cioe' quelle del ragionamento formale, quello in cui si arriva con certezza alla conclusione in base alla forma esteriore delle proposizioni, ovvero in base alla forma esteriore degli strumenti linguistici coi quali presentiamo il nostro pensiero.
Se io scrivessi: "3+2=5" e "3+2=6", chiunque anche se non sapesse quanto fa 3+2 potrebbe dire che almeno una e' sbagliata o magari entrambe. Una volta un giornalista diceva: "E' stato fermato un automobilista con due targhe diverse: almena una e' falsa"; e' vero, dato che le targhe devono essere uguali, se sono diverse almeno una non e' giusta.

Queste cose non sono filosofia, e' la vita di tutti i giorni: quando ragioniamo bene, ragioniamo cosi'.
Tanti anni fa mia sorella era professoressa di matematica, e ogni tanto il portinaio la chiamava a fare consulenza sui compiti della sua ragazzina. Una volta questa ragazzina aveva trovato scritto: "gr 980: peso di un kg di olio", e il padre che era solo operaraio ma aveva buon senso diceva: e' impossibile che 1 kg pesi 980 gr, e e lei diceva: ma e' scritto sul libro! Sono i misteri del peso specifico. Si tratta della logica del buon senso: riflettere su quello che si dice e cercare i legami di connessione necessaria tra certe proposizioni e certe altre, per cui se dico che 1 kg d'olio pesa 980 gr dico una proposizione senz'altro falsa, perche' la relazione richiederebbe l'identita', ragionamento che chiunque potrebbe fare purche' beninteso rifletta su quello che dice.

Oggi dobbiamo anche parlare di <u>definizione</u>. Questo e' un argomento che tocca il vivo della questione; vediamo un po' di addentrarci. Quando si parla di cose vere occorre chiarire bene il significato dei termini che si usano. Si apre il discorso della definizione, cui tengo molto perche' si tratta di buonsenso che spesso e' preso a calci da coloro che sentiamo parlare.
Definire il significato di un termine significa dire che cosa intendiamo indicare. Qui le leggi si riducono ad una secondo la l. classica: la def. deve esseere piu' chiara del termine che si intende definire. In particolare, il discorso che deve servire per definire deve contenere termini che sono tutti noti.
V.l'es. dell'annuario statistico italiano sulla "vita media" degli Italiani spiegata come "il numero degli anni che spettano in media ad un individuo". Altro es.: "si chiama insieme una collezione di enti presi come un tutto unico". E la collezione che cos'e'?
Non ditemi che e' un insieme di enti. Allora capita quello che mi ha segnalato il mio caro collega Galafassi su un dizionario di italiano: "salto": v. "balzo", "balzo": v. "salto". Oppure: "sedia": v. "seggiola", e viceversa.
Quindi: la definizione deve esser piu' chiara delle cose da definire. Es.: "automobile": un veicolo destinato a correre per strada e dotato di un motore interno che la fa muovere. Automobile e' in realta' un aggettivo sostantivizzato, il sostantivo era vettura; all'epoca le vetture erano tirate dai cavalli, l'automobile si muove da sola (a proposito della formazione di sostantivi da aggettivi, autolavaggio non e' il lavaggio dell'automobile, ma quello che mi faccio al mattino da solo; automercato non e' il mercato dell'automobile...). Devo sapere pero' che cosa vuol dire veicolo, strada, motore; pero' gia' osservava Pascal, ed anche Aristotele, non si puo' andare all'infinito, ci si morde la coda; in qualunque dizionario deve esistere un insieme di termini il cui significato deve essere dato dalle persone che leggono. A ben guardare, e' il modo in cui impariamo a parlare. Il bambino impara dalla mamma che gli dice "luna" indicandogli la luna. Cosi' ad un cinese non possiamo spiegare le parole parlando in italiano; gli si deve dare allora la definizione ostensiva (dal latino "ostendere", mostare) : mentre mostro una certa cosa ne pronuncio il nome.
Pero' i concetti astratti non possono essere mostrati con il dito (per additamentum). Allora per i concetti astratti bisogna far

ricorso ad un procedimento mentale che e' la cosiddetta <u>definizione d'uso, o def. implicita</u>.
Purtroppo gli oggetti della matematica sono di natura cosi' elementare e radicale che per essi occorre quasi sempre utilizzare la def. implicita, o def. d'uso, o def. per postulati. Che cosa fa per es. Peano nella teoria dei numeri naturali? Non dice: il numero e'....., ma incomincia a parlare, enuncia delle proposizioni in cui parla del numero, e da questo insieme di proposizioni la persona, se dotata d'intuizione, capisce che cos'e'il numero. Definizione d'uso: definizione che si da' usando.
Lo stesso fa Hilbert per i fondamenti della geometria: non definisce il punto, la retta, ecc., ma comincia a scrivere tante frasi in cui si parla del punto, della retta ecc.
E' vero che Euclide nei suoi Elementi ha scritto: il punto e' cio' che non ha parti, ma questa e' una frase che guardata bene non ha significato, perche' anche altre cose non hanno parti, ad es. il mal di testa....
Da 20 secoli i filosofi discutono su questa e su altre definizioni di Euclide; io penso che vadano interpretate non come vere definizioni, ma come descrizioni, frasi che aiutano a farti un'idea per conto tuo.
Una definizione deve essere il punto di partenza della deduzione di tutte le conseguenze e proprieta' dell'oggetto definito. Questo per gli enti materiali non e' possibile; lo e' per gli enti della geometria (ad es. dalla def. di quadrato posso dedurre tutte le proprieta' del quadrato), non pero' quelli semplici, perche' occorrerebbero definizioni ancora piu' semplici, e non e' possibile...
Ricordo la def. dell'operazione di addizione sul sussidiario di una mia figlia: "la somma e' l'operazione che permette di riunire due numeri per trovarne un terzo". Pazzesco! Lasciate stare, insegnate a farla, e poi arriveranno ai concetti concreti.
Non definite il punto, ne' la retta. Certo poi e' piu' difficile accertare che un concetto sia posseduto ed utilizzato piuttosto che una tiritera di parole sia ripetuta.
I concetti elementari vanno definiti in blocco, usandoli, esattamente come il significato di una certa carta o di un pezzo degli scacchi sta nelle regole del gioco.
Il caso della geometria e' piu' complicato di quello dell'aritmetica, perche' c'e' in gioco un'elaborazione fantastica: immagina un filo sottile... immagina di prolungarlo...viene fuori l'immagine della retta (Euclide lavora coi segmenti anche quando parla di retta, infatti allude alla infinita prolungabilita').
Riassumendo, l'insegnamento della matematica e' analogo all'insegnamento della lingua materna, di cui il bambino e' gia' in possesso; questo linguaggio va ampliato, precisato, collegato...

DISCUSSIONE

....

-p.M. ....non e' che moltiplicare un numero per 10 significa aggiungere uno zero sulla destra della successione di cifre che rappresenta quel numero, bensi': per moltiplicare per 10 si fa cosi'. Tra l'altro se non si usasse la numerazione decimale, la moltiplicazione per 10 si farebbe in tutt'altro modo.

Evidentemente anche qui era confuso insegnamento con addestramento, e l'insegnante si accontentava di un certo comportamento invece di dare il concetto.
Altro esempio: la def. di numero pari. Quante volte mi e' capitato di leggere: numero pari e' quello che termina per zero o per cifra pari. Anzitutto: che cosa vuol dire che il numero "termina"? Si intendeva dire che nella convenzione abituale di rappresentazione dei numeri interi il numero pari viene rappresentato con una successione di cifre la cui ultima cifra a destra e' o zero o una cifra che rappresenta un numero pari. Ma se la base invece di 10 fosse ad es. 3, il 4 sarebbe rappresentato con 11, e terminerebbe con una cifra dispari. Dal punto di vista della logica, gia' che stiamo parlando di l., si tratta di scambio tra la def. del concetto ed il criterio per riconoscerlo in certi casi particolari ed in un certo ambiente che non e' precisato. Allora, se io preciso l'ambiente, devo dire: per riconoscere un numero pari devi fare cosi' e cosi'...
Capisco che questo e' il dilemma terribile dell'insegnare certi compörtamenti perche' tra l'altro quando abbiamo di fronte una classe ci sono livelli molto diversi... Il problema didattico concreto e' un discorso molto serio ed importante; per questo motivo io dico che non intendo qui dare prescrizioni didattiche. Sarei contento se riuscissimo a riflettere insieme sulle cose veramente essenziali, in maniera che nesssuno di noi confonda l'addestramento ad un certo comportamento con l'educazione all'appropriazione dei concetti; diversamente si finisce per confondere il comportamento con il concetto; se poi il comportamento viene dimenticato, il concetto va perduto.

-M.G.Luisi ...il nome di una cosa non coincide con la cosa stessa, ma il riuscire a nominare indica la concettualizzazione che parte da un'esperienza.. Io continuo a riflettere su quello che lei diceva prima: l'insegnamento della matematica e' strettamente legato all'insegnamento della lingua, nel senso che la madre addita, dice al bambino: quella e' la luna, e il bambino fa l'abbinamento tra il significato e il significante, perche' glielo ha detto la mamma...Secondo me l'essenziale che lei diceva e' questo: forse non ci rendiamo conto, l'insegnante ai bambini, di quanto non abbiamo additato abbastanza, di quanto lavoriamo per detto e non per esperienza fatta...

-p.M. Condivido pienamente. Scusi se la interrompo per precisare in che senso andrebbe presa la frase che ho detto: la matematica ha un aspetto di linguaggio. Non e' che sia solo linguaggio, ma a livello elementare il parallelismo tra l'insegnamento della matematica e quello della lingua materna consiste in qualcosa che cerchero' di precisare ma su cui torneremo in tutti gli incontri successsivi.
Si tratta anzitutto di fornire dei mezzi di rappresentazione, cioe' dei simboli; come il nome e' il simbolo di una cosa diversa da lui, cosi' e' per vari strumenti verbali e grafici con cui noi indichiamo i concetti astratti della matematica; ad es. per il caso dei numeri naturali, non sono i numeri naturali, ma strumenti convenzionali per rappresentarli. Consideriamo la differenza ad es. tra la rappresentazione romana del tre, che e' data da tre stanghette che posso contare, e la cifra araba che e' solo uno scarabocchio a cui devo dare io il significato.

Quindi si passa attraverso la simbolizzazione e poi lo strumento espressivo. Ma la cosa piu' importante che fa la difficolta' ma e' la forza della matematica e' che questi simboli con la loro sintassi permettono la deduzione certa, perche' quando dico: ci sono 20 caramelle in un sacchetto e 10 in un altro, le riunisco in una scatola, so che devono essere 30, senza bisogno di contarle. Chi mi da' questa certezza? E' la struttura del linguaggio che ho usato per rappresentare gli insiemi. Se avessi detto: in uno ci sono tante caramelle, nell'altro poche, le ho messe in una scatola; che cosa posso tirare come conseguenza?
La possibilita' di rappresentazione precisa della matematica si collega in un secondo momento con la possibilita' di deduzione certa che questi strumenti linguistici danno. In quelle mie pagine ho scritto: immaginiamo di fare un'algebra degli aggettivi tanti e pochi: tanti unione tanti mi da' tanti, pochi unione pochi mi da' pochi, ma pochi unione tanti che cosa mi da'? Magari due folle composte da poche persone, messe insieme me ne danno tante...non so; non ho una struttura logica talmente cogente diciamo della deduzione che mi permette di ottenere un risultato univoco. Invece quando ho i numeri faccio la somma e viene quello che deve venire. Ecco allora che la struttura sintattica degli strumenti concettuali permette la deduzione; quindi la matematica non e' solo un linguaggio ma una chiave di lettura della realta', perche' se io rappresento con gli strumenti della matematica gli insiemi, le operazioni sugli insiemi sono perfettamente rispecchiate dalle operazioni sui simboli, in un modo che mi permette la deduzione certa della mie manipolazioni successive.
Ecco allora in che senso la logica e' strettamente collegata alla matematica. Peano diceva che la matematica e' una logica superiore, pero' in entrambe c'e' questo aspetto di rappresentazione precisa e di deduzione certa. Se io per es. segno le mie spese e alla sera faccio i conti, dico: devo trovarmi in tasca tot. Noi facciamo tutti i giorni questi discorsi, il che significa che usiamo la matematica come strumento preciso di rappresentazione e certo di deduzione; questo e' il significato dell'aspetto formativo della matematica, ma e' anche il successo della matematizzazione della scienza; sono due aspetti che non possiamo sviluppare qui perche' ormai e' tardi. Valore formativo a paragone di tutto questo bla bla bla di immagini parole senza senso stupidaggini che ci piovono addosso: coca cola di piu', abitare il tempo, bici ricerca, di questo enorme pattume di scemenze che ci tocca ingoiare anche senza volerlo tutti i giorni. La matematica e' espressione precisa delle cose. Poi la deduzione rigorosa. Ma su queste cose torneremo tante volte, e' la giustificazione di questo lavoro. Ha senso sfrondare il programma se lavoriamo in profondita', cioe' non se semplicemente vogliamo tagliarci un campicello piu' ristretto; lettura trasversale non e' far meno fatica, ma indirizzare la fatica in un'altra direzione, ma per far questo occorre una fatica diversa da quella richiesta nel propinare semplicemente delle nozioni.

-XY Volevo solamente una precisazione: mi sembra che all'inizio lei abbia parlato negativamente di diagrammi ad albero, di Eulero-Venn, ecc.. Se e' cosi', perche'?

-p.M. Non ho accennato negativamente. Ho voluto dire che la l. ha un'estensione molto piu' vasta della pura applicazione di questi

strumenti tecnici. Non vorrei scoraggiare o deprimere le persone che utilizzano abitualmente i diagrammi di Eulero-Venn o ad albero. Dico solo: sappiate che la l. e' qualcosa di molto piu' vasto e importante, e che si puo' ragionare bene senza diagrammi ad albero. E' questo che mi interessa il resto sono sussidi molto utili per chiarire o indicare il proprio modo di ragionare. Qualche volta su certi ragionamenti molto complicati mi e' capitato di doverli tradurra in simboli di l. simbolica per vedere se avevo ragionato bene o no.
La cosa che mi preoccupa e' che queste cose invadono talmente il panorama mentale da far pensare che siano indispensabili per ragionare bene. Ho visto un libro di matematica per la scuola media in cui tutti i ragionamenti sono fatti con diagrammi di flusso; il povero ragazzino che studia li' sopra e' convinto che per ragionare si debbano fare i diagrammi di flusso, anche quando si tratta di applicare la proprieta' associativa. Ora evidentemente questa e' una cosa distorta perche' il mezzo e' diventato il fine, lo strumento ha occupato tutto il panorama mentale.
Euclide non faceva i diagrammi di flusso eppure ha scritto dei libri in cui mi sembra che ragionasse bene. La l. e' nata molto prima dei diagrammi di flusso: come minimo e' nata con Aristotele.

5/11/90

II incontro col prof. Manara
(appunti non rivisti dall'autore)

-D. Non capisco i termini genere, specie, accidente...
-R. E' la nomenclatura abituale. Quando diciamo: "specifichi un po'": e' una frase del linguaggio comune, con cui chiediamo di specificare un discorso generico. Oppure l'espressione "diritto civile": nel grande genere del diritto c'e' la specie civile. Sono cose semplici. La logica e' buonsenso in pillole.

-D. A proposito di definizioni, io le faccio formulare dai bambini, senza prenderle dai testi. E' semplicistico o puo' andare bene?
-R. E' la strada giusta. In aritmetica elementare e in geometria le definizioni sono molto pericolose, perche' i concetti complessi possoño essere dfiniti, ma quelli semplici tratti dall'esperienza idealizzata no. Come quando il bambino impara a parlare, il significato delle parole non posso darglielo con definizioni, devo darglielo operativamente. Le definizioni formali, oserei dire verbali, soprattutto a questo livello bassissimo le eviterei il piu' possibile, perche' sono concetti che devono essere presi operativamente, secondo le definizioni d'uso.
Questo e' il grande progresso di Peano, che a differenza dei matematici precedenti non ha detto che cos'e' il numero, e da allora questa impostazione e' stata acquisita: non si puo' definire tutto, come diceva Pascal.
Per dare definizioni rigorose in aritmetica elementare bisognerebbe insegnare gli assiomi di Peano, ma ai ragazzini non possiamo. Non posso definire il numero 2; posso dire: queste sono 2 chiavi. L'attivita' di astrazione e costruzione del concetto che segue l'additamento e' tipicamente umana, come diceva gia' Socrate, non si puo' dire come uno deve fare a capire. I ragazzini poi capiscono, ma anche ripetono le frasi, allora se appena e' possibile non insegnamogliele. Ad es. la proprieta' commutativa: l'importante e' saperla usare, fargliela anche dire mi sembra sevizia intellettuale. E' il discorso che faccio da 30 anni contro l'insiemistica: le cose di assoluto buon senso che il bambino capisce, che sono cose di tutti i giorni, paludarle con vocabolario tecnico serve a fargli credere che siano cose enormi.
Quando facciamo una somma in colonna usiamo continuamente le proprieta' commutativa e associativa della somma; infatti immaginiamo di fare 237 + 431: e' un modo convenzionale di scrivere $2\times100 + 3\times10 + 7 + 4\times100 + 3\times10 + 1$; mettere in colonna vuol dire rivoltare tutto, cioe' utilizzare la proprieta' commutativa: $(2\times100 + 4\times100) + (3\times10 + 3\times10) + 7 + 1$, poi facciamo 7+1 che fa 8, ho gia' cominciato ad usare la proprieta' associativa della somma,ecc.
Quando il ragazzino capisce che 5+3 = 3+5, lo capisce per sempre; se riusciamo a fargli dire che e' la proprieta' commutativa, bene, ma non e' necessario. La comprensione del concetto non equivale alla ripetizione esatta del nome convenzionale tecnico della legge. Prima dei 13 anni esiste la razionalita', ma e' soprattutto operativa: il bambino sa ragionare in relazione alle operazioni che fa. Costringerlo all'astrazione teorica gli nuoce perche' lo

si convince che i concetti sono parole, che basta pronunciare paroloni per avere imparato le cose. Teorizzare con parole tecniche sugli atti mentali e' un passo successivo rispetto al farli correttamente, e a quest'eta' e' un peso non necessario e fuorviante. Anche Boole nel suo libro: "I principi del ragionamento umano" non usa formule ma buonsenso. Cosi' e' per la lingua materna: insegnamo loro a parlare bene, un minimo di morfologia, di sintassi, ma la riflessione teorica su questi strumenti espressivi verra' dopo; verra' il momento dell'analisi logica, della sintassi teorica, ma a questo livello di eta' il discorso razionale si esplica nell'operativita' concreta.; gli strumenti concettuali devono essere usati.
Quanto all'insiemistica, ai diagrammi di Eulero-Venn, se non insegnamo al ragazzo un simbolismo alla sua portata, se non controlliamo ad ogni passo che sappia leggere il simbolo, rischia di portarsi avanti una divaricazione tra simbolo e significato fino all'universita'; di credere che le parole risolvano i problemi e di accontentarsi delle parole. Se vogliamo insegnare a ragionare, controlliamo ad opgni passo che siano capaci di far funzionare i concetti.
Gli atti elementari della razionalita' umana non e' possibile definirli ulteriormente, soprattutto a questa eta'.
So che e' piu' difficile verificare che un concetto e' posseduto in modo operativo piutttosto che verifacare che una frase e' memorizzata come sul libro. Ma la matematica non puo' essere ripetuta come la storia, deve essere capita, cioe' occorre saper applicare le strutture concettuali.

-D. (si parla di un bambino che davanti alla consegna di mettere in ordine di grandezza degli oggetti voleva sapere se si intendeva dal piu' grande al piu' piccolo o viceversa)
-R. Riguardo ai problemi che si pongono ai bambini, occorre dire che c'e' una quantita' di conoscenze presunte o di idee nella testa di chi domanda ma non di chi deve rispondere, oppure c'e' il problema del lessico che e' piu' povero nel bambino che nell'adulto, tanto che puo' intendere qualcosa di diverso (es. del bambino che chiedeva alla mamma: ma la luna ha la bocca? perche' aveva sentito giorni prima la frase: "ma con la luna non parla", riferita ad una persona che era di cattivo umore, e l'aveva rielaborata a modo suo), o puo' rispondere giusto ma col lessico sbagliato. Ancora: spesso nei problemi non sono date tutte le informazioni, o sono presunte informazioni che il bambino non ha .

I concetti penetrano pian pianino, come l'acqua.
Non possiamo pretendere che discorsi che per noi sono chiari precisi esattamente definitori abbiano lo stesso valore per il bambino, soprattutto in questa fase dello sviluppo mentale. La razionalita' e' operativa, non possiamo forzarla a diventare teorica e astratta; dobbiamo accontentarci di guidarli per mano in un comportamento razionale.
Inoltre dobbiamo pensare che un ragazzino deve gia' imparare una quantita' di convenzioni che non sono assolutamente naturali, ma sono frutto di una evoluzione della civilta' di almeno 20 secoli.
Dire che il sacchetto vuoto contiene zero caramelle e' una convenzione (io conto le cose quando ci sono e non le conto quando non ci sono) -non contradditoria, non cervellotica, comoda, ma convenzione-, non discende cioe' necessariamente dal concetto di

numero. I Greci contavano benissimo, ma facevano a meno dello zero; noi costringiamo i nostri ragazzini a dire che lo zero e' un numero. Sono questioni ben diverse dalla razionalita' teorica coerente. Quindi, gia' li costringiamo a imparare tante cose convenzionali che per noi sono diventate semplici ma per loro sono difficili: non costringiamoli ad imparare anche le formulazioni teoriche astratte. Questa razionalita' astratta verra' verso i 13-14 anni, ora c'e' l'operativita' razionale coerente.

-D. Il discorso fatto sulle definizioni vale anche per le scuole medie inferiori?
-R. Direi di si'. La motivazione profonda del pensiero di Peano ad es. sul concetto di numero naturale non so nemmeno da quanti studenti universitari e' capita. Vogliamo dare gli assiomi di Hilbert a ragazzini di 12 anni? Io non lo farei, li condurrei piuttosto a ragionare concretamente. Racconto sempre quello che e' accaduto a me; io ho incontrato la geometria razionale in IV ginnasio, a 14 anni; usavamo il libro di Enriques Amaldi; mi ricordo che mi piaceva dimostrare teoremi difficili (come il teorema di Feuerbach), ma il I capitolo, quello delle definizioni elementari, l'ho sempre saltato. Per un ragazzino la dimostrazione serve per capire cose che non sono evidenti. Il gusto di dimostrare cose semplici, che gia' appaiono dall'esperienza, viene solo molto piu' avanti. Solo dopo uno capisce il significato del fare un'assiomatizzazione, dello sminuzzare le singole pietruzze. Anche quando si esplica la razionalita' astratta, la dimostrazione appassiona se serve a dimostrare cose non visibili, e soprattuttto non cose che sono oggetto di assiomatizzazione.
Nella scuola media bisogna gia' rivedere e ridigerire le cose della scuola elementare; poi ingoiare il calcolo letterale, che e' il primo passo verso la visione teorica della matematica, cioe' verso una generalizzazione di certe proprieta' delle operazioni che non sono legate ai singoli elementi ma all'operazione stessa; mi spiego: se dico che 11 e' un numero primo, questo vale per il numero 11 ma puo' non essere vero per un altro numero; ma se dico che 3+8 e' uguale a 8+3, questa relazione non da' una proprieta' del 3 e dell' 8, ma una proprieta' che e' valida qualunque sia la coppia di numeri; dovrei scrivere: a+b=b+a; e' una proprieta' non dei numeri b ed a, ma dell'operazione che eseguo. Allora quando cominciamo il calcolo letterale, cominciamo a studiare la grammatica e sintassi del linguaggio matematico, non solo ad usarlo; e questa e' una difficolta' che non tutti i ragazzini superano, e' un passaggio di astrazione notevolissimo (mi ricordo quando ero bambino e vedevo i libri di mia sorella, continuavo a chiedere. ma quanto vale a, quanto vale b?).

-D. Che cosa ne pensa dei capitoli di logica e di probabilita' e statistica?
-R. Sono proprio quegli ampliamenti cui faccio riferimento quando dico di voler sfrondare. Pero' se oltre ai programmi leggiamo le indicazioni didattiche, ci sono scritte cose di grande consolazione per noi. C'e' scritto che la logica non deve essere oggetto di trattazione particolare, ne' si deve fare una premessa di logica allo svolgimento del programma, come una volta nel corso di filosofia dei Gesuiti; no, dicono le premesse, la logica va insegnata in itinere, camminando. Se questo e' vero per la scuola media superiore, ancor piu' lo e' per l'elementare. A questo

livello, la logica non e' altro che riflessione sui nostri modi di ragionare, sui passaggi essenziali del ragionamento.
L'unica esemplificazione che si fa e' l'uso dei connettivi "e" ed "o"; spesso in italiano ci esprimiamo in modo equivoco, o in modo che va chiarito dal contesto, o alcune particelle che hanno un significato particolare per la logica devono essere usate con un minimo di riflessione. Si tratta ad es. di saper distinguere a seconda di dove viene messo il "non" come cambia il significato: "non tutti mangiano" e "tutti non mangiano"; oppure l'uso della "e": "in questa classe ci sono bambini e bambine" (unione); "la tizia e' brutta e cattiva" (intersezione tra l'insieme di brutti e quello dei cattivi). Analogamente per la "o", si puo' avere significato esclusivo, o di unione. Questo e' buonsenso, non logica; chiamiamolo pero' pure logica.
Quanto al discorso della classificazione e seriazione, e' una parte della l.: quella che insegna a mettere insieme certi oggetti secondo certi punti di vista costruendo degli insiemi uno inscatolato nell'altro; cio' che zoologia botanica e scienze naturali fanno da secoli quando ci insegnano che per dare la precisazione di una specie animale o razza bisogna mettere in ordine tipo, classe, ordine, famiglia, genere, specie e magari anche sottospecie. Sono discorsi assolutamente elementari; l'insegnante per primo deve cominciare a parlare con precisione, poi prendere l'occasione per aiutare i ragazzi in classe a riflettere: "se tu dicessi cosi' sarebbe la stessa cosa?; oppure facendo due frasi con lo stesso aspetto esteriore, ma in cui la particella "o" e' usata in modo diverso, e poi discutendo; questo e' riflettere sui nostri modi di parlare, o meglio di esprimerci razionalmente, anche in sede di insegnamento della lingua materna. Come diceva il prof. Luccio: "il contadino ha un cane"; un cane e' predicato di possesso; se dicessi "il contadino ha fame", e' possesso anche quello? Qualunque ragazzino capisce che il verbo avere nelle due frasi ha significato diverso; se lo facciamo riflettere, facciamo della logica.
Quanto al simbolismo, all'inizio di questo secolo e' stata reinventata la logica simbolica e sono stati costruiti almeno 4 sistemi di simboli logici: quello di Peano, quello di Hilbert, quello polacco di Lucasiewics e quello classico di Boole; il che significa ovviamente che ciascuno di questi grandi personaggi lavorava bene ed aveva il suo modo di esprimersi; quindi non e' necessario che io scriva le proposizioni come Lucasiewics, posso scriverle come Peano, cioe' in sostanza ragionando. Non si puo' mettere in testa alla gente che bisogna passare da una certa strada, che puo' essere utile, ma non necessaria (V. il maetrso di Gauss). In definitiva: far riflettere il r. su cio' che dice, eventualmente presentandogli controesempi, in modo da condurlo ad usare con precisione la lingua materna.
Le classificazioni e seriazioni ognuno le sa fare direttamente, ad se. distinguere le mele tocche da quelle buone: prendiamo coscienza del fatto che sono classificazioni, ma non occorre l'ermellino.
Il diagramma di flusso serve a prendere coscienza esplicita di tutti i passaggi logici che facciamo automaticamente; se lo vedo come strumento e lo domino, serve a chiarire a me stesso (quando fosse necessario) l'analisi del mio comportamento mentale e pratico. Ma se io dicessi che per fare l'uovo in padella occorre il diagramma di flusso, allora il ragazzino non crede piu' al

diagramma di flusso, ed ha ragione.

Il discorso del <u>Calcolo delle probabilita'</u> e' ancora piu' grave. E' molto difficile dare al ragazzino il significato del Calcolo delle probebilita'. Come lo presenta Pascal, si tratta del massimo di razionalita' da utilizzare in condizioni di incertezza. Esiste una quantita' di concetti accessori non necessari. Da una parte il ridurre il calcolo delle probabilita' alla combinatorica: lancia una moneta una volta, due volte, ecc.: quante volte puoi ottenere testa? (su due lanci puoi ottenere zero teste, una testa, due teste; vuoi scommettere? ma una testa puoi ottenerla in due modi, e' il discorso classico di Bernoulli, ha piu' di due secoli).
Tutto cio' puo' servire ad allenare i b. a riflettere, immaginare, distinguere i casi, contarli bene, a stimolare la curiosita' e la creativita', ma non e' calcolo delle probabilita', e' combinatorica, a volte divertente, a volte ingegnosa.
Il calcolo delle probabilita' e' piu' avanti, svoltato l'angolo. Ben pochi autori riescono a metterlo in evidenza: si tratta del massimo di razionalita' in condizioni di incertezza. L'impostazione frequentista conduce a ragionare male, perche' lega il C. delle p. alla combinatorica. Caso tipico: la caccia ai numeri del Lotto in ritardo, in cui si confonde la serie con il singolo evento. Se lancio la moneta 99 volte ed esce sempre testa, la gente dice: mi gioco la camicia che deve venire croce, perche' la serie di 100 teste e' rarissima. Questo e' vero, ma non e' sulla serie che stai scommettendo, bensi' sull'esito futuro. La serie di 99 teste non e' piu' oggetto di scommessa, ma di cronaca: la registri e basta; dovevi scommettere prima di cominciare, adesso stai scommettendo solo sull'ultimo lancio, che ha probabilita' 1/2 come ciascuno dei precedenti. La moneta non ha memoria ne' coscienza, diceva Laplace.
Oppure la statistiche assurde sui numeri in ritardo... La gente con fantasia antropomorfizzante vorrebbe ricavare l'equita' da cose che non sottostanno all'equita', perche' non sono sottoponibili a tale giudizio.
Non esiste la probabilita' dell'evento, ma la valutazione che ogni soggetto da' in relazione alle informazioni che possiede e all'impegno economico che intende assumere. V. l'esempio del dado, che io credo sia giusto, col baricentro nel centro geometrico, il baro invece che ci ha messo un pezzetto di piombo ha piu' informazioni di me e valuta in modo diverso la probabilita' della scommessa.
Il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili e' un criterio provvisorio ragionevole per valutare la probabilita', ma non e' la definizione di probabilita' (il ragazzo si forma l'idea che una valutazione di 90 su 100 di prob. di un certo evento significa che <u>deve</u> capitare 90 volte su 100, ma non e' cosi').
Ci sono poi le due scuole, quella soggettivistica, fondata da B.De Finetti e Savage, e quella oggettivistica o frequentistica. Ma se proprio vogliamo parlare di queste cose, separiamo l'aspetto combinatorico (stimolante per la fantasia e la critica) da quello veramente probabilistico, che e' delicato perche' passa attraverso una operazione di impegno: <u>se tu dovessi scommettere, che cosa faresti?</u> Il momento della probabilita', cioe' dell'impegno economico in condizioni di incertezza, avviene quando uno deve impegnarsi. Questo significa che, se ho valutato la prob. come

90%, se devo scommettere e' ragionevole che io scommetta il 90% della somma che eventualmente ricaverei. La valutazione fatta con il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili e' pero' provvisoria, perche' puo' avvenire che:

-non si possa assimilare l'evento aleatorio ad uno di quegli eventi elementari che si schematizzano come estrazione di palline da una o piu' urne, lancio di dadi, estrazione di carte da mazzi ben mescolati ecc. Il mondo e' ben piu' complesso!

Quando sia possibile questa assimilazione, allora valutiamo prudentemente la probabilita' in questo modo; ma in generale la valutazione del rischio e dell'impegno viene fatta osservando il passato, cioe' mediante le statistiche (ad es. le statistiche delle tavole di mortalita' per il premio di assicurazione sulla vita).

-che in itinere ci siano informazioni che modificano la valutazione della probabilita' di un evento (nell'esempio precedente, la conoscenza della particolare storia clinica ell'assicurato).

19/11/90

III incontro col prof. Manara
(appunti non rivisti dall'Autore)

Dimostrazione: la parola stessa dice di che si tratta; si tratta di far vedere la verita' di una proposizione in base alla verita' di altre e ai ragionamenti logici. E' quindi un'operazione tipicamente razionale; se si fa in geometria, quasi sempre ci si serve di figure; pero' le figure non sono fondamento di conclusione logica: v. "La geometria col computer": col computer non si fa la geometria, al massimo si fanno i disegni, magari meglio che a mano se si danno le istruzioni giuste; ci sono pero' in circolazione tanti bei bisegni fatti col computer ma sbagliati: per es. il disegno della Pan Am, quello che vorrebbe essere una sfera coi paralleli, e' sbagliato; il disegno delle Nazioni Unite, che vorrebbe rappresentare il mondo, e' sbagliato in termini di geometria descrittiva, e su tanti libri ci sono tanti disegni sbagliati....
Tornando alle dimostrazioni, tanti anni fa quando lavoravo sugli audiovisivi con l'amico Lucchini, abbiamo proiettato un film di didattica proposto dall'UMI, che voleva illustrare il teorema che afferma che per tre punti non allineati passa una circonferenza. Il film era fatto cosi': prima si vedevano tante tante circonferenze, tante come bolle di sapone; poi compariva un punto e allora le circonferenze passavano per quel punto, pero' erano ancora tante tante; poi compariva un altro punto e allora le circonferenze passavano per quei due punti; poi ne compariva un terzo e allora tac, le circonferenze si fermavano. Una professoressa in sede di discussione si e' alzata e ha detto che finalmente aveva capito quel teorema. Ho cercato di farle capire che quella non era una dimostrazione.
Per fare una dimostrazione bisogna dire: -che cos'e' una circonferenza (il luogo dei punti che hanno tutti una certa distanza da un punto dato che si chiama centro); -teorema: dati tre punti non in linea retta esiste una e una sola circonferenza che passa per essi. Come si dimostra? Vi faccio la dimostrazione che e' sui libri di geometria, almeno quelli di quando ero bambino. Ci sono tre punti A, B, C : cerchiamo il centro, che deve essere a uguale distanza da A, B e C; allora prendiamo il segmento AB, e prendiamo tutti i punti che hanno da A e da B distanze uguali; un teorema dimostrato in precedenza dice che tali punti stanno sull'asse del segmento AB, cioe' la perpendicolare al segmento AB passante per il punto di mezzo; quindi se il centro deve distare ugualmente da A e da B deve trovarsi su questa retta. "Deve": sono sempre condizioni necessarie. Faccio lo stesso discorso su B e su C: se il centro deve essere a uguale distanza da B e da C, deve trovarsi sull'asse del segmento BC. Osservazione: le due rette non possono essere tra loro parallele, perche' si dimostra (per il momento tralasciamo) che se lo fossero i tre punti sarebbero necessariamente allineati. Allineati non sono, quindi le due rette non sono parallele. Allora c'e' un punto di intersezione; in quanto sta sulla prima retta, esso e' ad uguale distanza da A e da B; in quanto sta sulla seconda, e' ad uguale distanza da B e da C;

allora e' ad uguale distanza da A, da B e da C, ed e' il centro della circonferenza. Non solo, ma se congiungessi A con C e prendessi la perpendicolare nel punto medio di AC, essa necessariamente andrebbe a passare per il centro.
Questo si chiama ragionare, perche' si parte dalla definizione e si deducono le conseguenze necessarie. Gia' Platone diceva che l'oggetto della considerazione del geometra non sono le figure che egli traccia sulla sabbbia, ma sono i concetti richiamati da quelle figure; a distanza di secoli il grande David Hilbert diceva che le figure sono formule disegnate; che cos'e' la formula? un simbolo; le formule sono simboli; pero' quello che ci deve condurre a conclusione certa e' solo la nostra testolina, cioe' la dimostrazione in base a ragionamento.
Gia' che ci siamo <u>parliamo di analisi e di sintesi</u>, cosi' concludiamo questo discorso; poi lo riprenderemo a proposito dei problemi: gia' in Euclide si trova lo stesso discorso di analisi e di sintesi per quanto riguarda la dimostrazione dei teoremi e per quanto riguarda i problemi.
Un minuto fa ho fatto notare: quel punto <u>deve</u> trovarsi..; deve: condizione necessaria, pero' non sufficiente; continuiamo a dedurre condizioni necessarie, gia' i Greci dicevano che facciamo un procedimento di analisi; questo si trova gia' in Euclide e in Aristotele: si dice che si fa il procedimento di analisi quando dalle ipotesi si deducono le condizioni necessarie ; se io da una proposizione traggo una conseguenza, questa si dice condizione necessaria per il sussistere della condizione. Pero' se noi vogliamo che la condizione sia sufficiente, cioe' a dire che quello sia non un punto qualunque ma il centro della circonferenza, trovato che sia quel punto dobbiamo tornare indietro e far vedere che quel punto e' veramente il centro della circonferenza che cerchiamo. Abbiamo detto: se cerchiamo il centro, esso deve stare sulla prima retta, condizione necessaria; se cerchiamo il centro, esso deve stare sulla seconde retta, altra condizione necessaria; le due rette necessariamente si intersecano, in base all'ipotesi che i tre punti non siano allineati (in seguito faremo anche il ragionamento utilizzando la proposizione contronominale); otteniamo un punto di intersezione, che e' proprio il centro perche', in quanto sta sulla prima retta e' ad uguale distanza da A e da B, in quanto sta sulla seconda e' ad uguale distanza da B e da C; con cio' noi abbiamo fatto il procedimento di sintesi: preso questo punto, esso e' necessariamente il centro della circonferenza.
Non e' detto che dobbiamo sempre fermarci a dire: questa e' l'analisi, questa e' la sintesi; ma dalle condizioni necessarie si tirano le conseguenze, arrivati alle conseguenze si verifica che le condizioni sono soddisfatte, che quello e' proprio il punto che stiamo cercando. Non solo, ma noi ritroviamo che anche la terza retta, l'asse del segmento che congiunge A con C, deve passare per quel punto, quindi quello e' il punto per cui passano tutti i tre assi.
Quello fatto e' un esempio di dimostrazione: un ragionamento che si fa partendo dalla definizione e cercando di soddisfare la definizione; e' sempre un ragionamento, non una figura. La matematica non si insegna coi films; anche i films pero' possono servire (e' il discorso degli audiovisivi); quando noi presentiamo un oggetto geometrico, lo presentiamo simbolizzandolo con una figura (insisto sul discorso di Platone e di Hilbert), ma la

figura e' una, mentre il concetto ha un'estensione infinita. Puo' capitare che i nostri ascoltatori, ed anche forse la nostra testa, si fissino su quella figura; il moltiplicare i casi in cui un medesimo concetto generale viene realizzato in tante circostanze diverse (non in tutte perche' il concetto e' generale e quindi puo' avere infinite realizzazioni) puo' aiutare a capire la generalita' del concetto. Ecco perche' si raccomanda di non disegnare sempre il rettangolo col lato piu' lungo parallelo al bordo inferiore del foglio, perche' se poi lo si disegna capovolto alcuni non capiscono piu' che e' un rettangolo; oppure l'esempio del quadrato che viene chiamato rombo nel codice della strada....
Ecco che allora l'audiovisivo serve per realizzare la migliore possibile generalita' del concetto astratto.
Ho gia' detto che il grande geometra Karl G. C. von Staudt, il fondatore della geometria proiettiva, un secolo e mezzo fa faceva lezione senza lavagna e senza disegnare figure. Il suo celebre libro: "Geometrie der Lage" non ha neanche una figura; egli infatti diceva giustamente che la figura blocca la generalita' del concetto. Anche a me qualche volta capita di dire: "senta, mi faccia la descrizione immaginandoselo; mi enunci i rapporti geometrici senza fare la figura" per vedere se ha il concetto e i legami tra i concetti veramente in testa o li ha soltanto in immagine. Purtroppo viviamo in quella che viene chiamata la civilta' dell'immagine, che e' la barbarie dell'immagine, per cui senza figurine non capiscono niente. Riassumendo:
-le figure servono ma non sono la dimostrazione; essa si ha solo col collegamento logico tra i concetti, collegamento percepito dalla nostra mente e non dalla nostra immaginazione
-la figura fa correre il rischio di quello che la teoria della Gestalt chiama "fissita' funzionale", cioe' di far passare l'accessorio per l'essenziale, la circostanza particolare accessoria come costituente del concetto.
Se noi quindi vogliamo far camminare i nostri piccoli clienti nella direzione della razionalita' dobbiamo tener presente queste due cose: non dico dobbiamo abbandonare le figure, ma avviare al ragionamento; la figura non e' il fondamento di conclusioni, tant'e' vero che da tutt'altro punto di vista c'e' la teoria dei frattali in cui le figure non si possono fare e quindi se non ci si basa sul ragionamento non si capisce niente.
Ecco allora che il discorso della dimostrazione, con i due pilastri fondamentali di analisi e sintesi, cioe' deduzione di condizioni necessarie e poi controllo che le cose trovate realizzino anche le condizioni sufficienti, come abbiamo mostrato, permette alla nostra mente di prevedere la verita' conclusiva con certezza.
Allora il discorso che stiamo facendo oggi vuol mettere l'accento sulla <u>differenza tra dimostrazione e verifica</u>, perche' a volte si fa un po' di confusione.
La <u>verifica</u> consiste nel constatare che le cose che noi vediamo stanno in un certo modo. Ma possiamo garantire che sempre stiano in quel modo? E' solo la dimostrazione cioe' il ragionamento che ci conduce alla certezza; la verifica non basta, a meno che quella verifica sia fatta in modo da garantire che abbiamo veramente esaminato tutti i casi possibili.
Altro esempio, un teorema di aritmetica: "I quadrati di numeri dispari sono tutti numeri dispari". Come si dimostra?
Scegliamo le convenzioni abituali di rappresentazione

arabo-indiane (potremmo anche usare le convenzioni romane, ma i calcoli sarebbero complicati). Un numero scritto con le convenzioni abituali ha la cifra delle unita', quella delle decine, quella delle centinaia ecc. Allora, isoliamo (nella rappresentazione del numero con queste convenzioni) la cifra delle unita', chiamiamola a: n=a+10b, perche' se tolgo dal numero n la cifra delle unita' mi resta un numero che termina con uno zero, cioe' divisibile per 10. Es.: 237; se tolgo 7, resta 230; posso scrivere: 237=7+10×23.
Ora facciamo il quadrato di n:

$$(a+10b) \times (a+10b) = a^2 + a\times 10b + a\times 10b + 100b^2$$

Dobbiamo dimostare che questo numero e' dispari. Per vedere la natura di un numero, dobbiamo guardare la cifra delle unita'; dove sta? (a+10b) ha uno zero come ultima cifra, perche' e' moltiplicato per 10; 100 b^2 ha addirittura due zeri; allora la cifra delle unita' sta in a^2: se esso e' dispari, tutto il numero e' dispari.
Adesso e' il momento in cui facciamo una verifica ricordando l'ipotesi che n e quindi a sia dispari; ma i numeri dispari di una sola cifra sono solo 1,3,5,7,9. Ecco che allora facciamo la verifica, la constatazione, ma questa volta serve per dimostrazione, perche' siamo sicuri di aver analizzato tutti i casi. Facciamo i quadrati di questi cinque numeri e vediamo se possono essere pari. Il quadrato di 1 e' 1, di 3 fa 9, di 5 fa 25, di 7 fa 49, e di 9 fa 81: sono tutti dispari. Quale che sia il numero a rappresentato da una sola cifra, n^2 e' un numero dispari. Dunque: il quadrato di un numero dispari e' sempre un numero dispari.
Questa e' una dimostrazione un po' diversa dalla precedente, perche' ad un certo punto interviene una verifica, una constatazione; ma la verifica ha valore generale, perche' siamo in grado di dire: questi sono gli unici numeri rappresentati con una sola cifra che siano dispari. Adesso dobbiamo fare il viceversa: se avessimo un numero di cui sappiamo che il quadrato e' pari, puo' essere un numero dispari? Questo e' un ragionamento classico detto "a contrariis": se da una proposizione p si trae una proposizione q, dalla negazione di q si trae la negazione di p.
Se io dico: "tutti gli onesti votano per il mio partito" (se vogliamo fare il diagramma di Eulero Venn, chiamiamo A l'insieme degli onesti, B quello di chi vota per il mio partito, A e' contenuto in B), tu non hai votato per il mio partito, dunque sei fuori anche dagli onesti. Questo e' il giardino, questa e' la vasca dei pesci rossi dentro al giardino, se uno e' fuori dal giardino a maggior ragione e' fuori dalla vasca dei pesci rossi.
Se avessimo un numero di cui sappiamo che e' un quadrato ed e' pari, puo' essere il quadrato di un numero dispari? No, perche' abbiamo dimostrato che il quadrato di un numero dispari e' dispari, se questo non e' dispari non puo' essere il quadrato di un numero dispari.
Sono cose elementari ma vale la pena di ricordarle: c'e' modo di riflettere sui punti fondamentali del ragionamento.
Se uno dice: tutti gli onesti votano per il tuo partito, io ho votato per il tuo partito dunque sono onesto: no no caro, tu hai votato per il mio partito, ma tra i votanti per il mio partito ci sono anche i ladri. Analogamente: se sei bravo vinci il campionato; ma se lo vinci, non e' detto che sei bravo. E' un errore che viene fatto spesso, in cui si scambia la condizione necessaria con la condizione sufficiente: cosa che viene fatta

abitualmente per imbrogliare la gente...
Abbiamo isolato due casi: quello di geometria, il primo teorema in cui mi sono imbattuto nella mia vita 60 anni fa nel ginnasio: qui ho capito che cosa voleva dire dimostrazione; e quello di aritmetica, in cui abbiamo seguito una strada piu' complicata, perche' abbiamo usato anche una verifica, la quale e' valida nella misura in cui siamo sicuri di aver elencato tutti i casi possibili; diversamente non ha valore probatorio. Se la verifica non torna, allora certamente anche la proprieta' non e' vera; ma se la verifica e' positiva, non e' detto che la proposizione di partenza sia vera.
E' il discorso che Popper ha diluito in molti volumi: se da un'ipotesi traggo certe conseguenze, se le conseguenze sono smentite l'ipotesi e' certamente falsa; ma se sono confermate non e' detto che l'ipotesi sia vera.
Purtroppo in aritmetica le dimostrazioni rigorose sono difficilissime da dare, perche' bisognerebbe fare un'assiomatica dei numeri reali come l'ha fatta Peano e poi dimostrare rigorosamente tutte le proprieta' delle operazioni sui numeri, ecc.:bisognerebbe fare un'aritmetica razionale ben fatta, cosa che non si fa neanche nelle scuole magistrali. Quindi nell'enorme maggioranza dei casi dobbiamo limitarci a presentare una o due verifiche e poi lasciare che le testoline dei nostri clienti generalizzino. Per es. bisognerebbe poter dimostrare che la somma di due numeri dispari e' sempre un numero pari; ma come lo fai? Si puo' sempre fare un discorso analogo al precedente, con la scrittura di n=a+10b, la somma, e poi la verifica in tutti i casi particolari, discorso che non si puo' fare in una scuola elementare; oppure...

E.Ventura: ...stavamo facendo una verifica sui numeri pari e dispari, e una bambina mi ha detto: come e' possibile, se faccio 5+5, che sono due numeri dispari, mi viene un numero pari. Ho scritto la domanda alla lavagna e ho chiesto: tu che cosa ne diresti? e a tutti gli altri: aiutate Michela a trovare una risposta. Subito un'altra dice: ma si', se sommo un numero dispari e un numero pari mi viene sempre un numero dispari. Allora cerchiamo anche questa risposta. L'hanno trovata in questo modo, per numeri piccoli: si erano esercitati a suddividere in due parti le varie quantita' rappresentate dai numeri e trovare che coi numeri dispari avanzava sempre 1; per cui sommando l'1 del primo numero dispari con quello dell'altro formavano un'altra coppia, e questo dava la possibilita' di ottenere un numero pari. Hanno dunque trovato loro le risposte, poi hanno posto l'ultima domanda: perche' sommando due numeri pari si ottiene sempre un numero pari?

prof.M.: Se vogliamo proprio fare il ragionamentino, qui abbiamo un numero, chiamiamolo n; un altro numero, chiamiamolo n', a e a' siano le rispettive cifre delle unita'; se faccio n+n', utilizzando la proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma, viene: n+n'= a+a'+10(b+b'); allora ecco il ragionamento che abbiamo fatto prima : puo' 10(b+b') influire sulla cifra delle unita'? No, perche' e' moltiplicato per 10; l'eventuale influenza sulla cifra delle unita' e' solo nell'addendo a+a'; facciamo tutti i casi possibili, sono 10 le cifre che posso sostituire ad a, 10 ad a', facciamo 100 casi, anzi 55 perche' a+a' = a'+a, e vediamo che cosa viene fuori. Di nuovo si ritorna a ragionare: le cose devono essere cosi' , poi a fare la verifica in tutti i casi possibili. Ma se i bambini sono soddisfatti del loro discorso e' sufficiente, siamo noi che dobbiamo sapere che queste cose bisogna ragionarle. Sono cose riservate agli insegnanti, non da portare in classe. Noi dobbiamo sapere che quella dei bambini e' una generalizzazione intuitiva del discorso, con questa precauzione: che la generalizzazione intuitiva puo' essere valida in qualche caso, come puo' essere questo, e puo' dare dispiacerei in altri casi.

Passiamo ora a considerare il problema del problema.
Loro sanno meglio di me che i ragazzini della scuola elementare (ma anche quelli del liceo) sono preoccupati sempre della procedura: devo fare la moltiplicazione o la divisione? Sono polarizzati dall'operazione concreta, non dal ragionamento, che e' invece la cosa piu' importante.
Non trattero' dei problemi incompleti o mal formulati, nonostante questo sia un discorso molto importante: molto spesso crediamo che il ragazzo non abbia capito l'aritmetica, mentre non ha capito le parole con cui gli abbiamo enunciato il problema. a volte le parole ai nostri orecchi suonano in un certo modo, mentre ad altri orecchi suonano in maniera diversa, perche' le parole hanno una quantita' di sensi che sono determinati dal contesto, loro ne conoscono magari uno solo, ed e' quello che li conduce fuori strada (v. esempi del prof. Luccio e di Stella Baruk). La formulazione dei problemi e' molto importante, il ragazzo deve capire le cose che gli si domandano. Qui sto prendendo la parola "problema" nel senso matematico del termine, escludo altri significati. Uno si trova in una situazione di dubbio e vuole avere una risposta, una procedura, questo e' un problema. Nel caso della matematica le risposte sono contenute nel problema implicitamente, si tratta di farle diventare esplicite, perche' l'enunciato del problema, quando e' fatto bene, contiene tutti gli elementi sufficienti per arrivare a dare la o le risposte.
Non mi piace l'abitudine del mio amico prof.Canetta di enunciare i dati sotto forma di ipotesi, ad es.: trovare l'area di un rettangolo di lati a e b se a=2 e b=100; il "se" in questo caso e' fuorviante ; io preferirei dire: c'e' un certo rettangolo i cui lati sono chiamati a e b, con le seguenti misure...ecc...
Il nucleo logico del problema e' gia' stato analizzato dai Greci. La mia ammirazione per l'intelligenza dei Greci e' data dal fatto che non soltanto hanno costruito delle teorie meravigliose, ma hanno codificato le procedure ed hanno analizzato anche su quali basi si fonda la validita' delle cose che dicono, cioe' non soltanto hanno detto che le cose stanno cosi' e si fanno cosi', ma che devono stare cosi'. Allora, anche qui il discorso di Euclide (ma i passi sono di dubbia attribuzione, pare che siano i commentatori successivi, comunque si trova in Aristotele) e' ancora della procedura di analisi e di sintesi: dai dati noi deduciamo le condizioni necessarie, e via via , se arrivati ad una certa conclusione non abbiamo ancora una risposta, da quella partiamo per trovare altre condizioni necessarie, e cosi' via, fino a che, dice Euclide, la risposta si presenta da sola, cioe' fino a che una deduzione e' tale che la risposta e' immediata, oppure e' la soluzione di un problema gia' risolto precedentemente, quindi fa parte del nostro patrimonio di conoscenze.

Vediamo sotto forma di problema il teorema di geometria dimostrato prima: qual e' il centro della circonferenza che passa per A, per B e per C? La risposta e' il solito discorso di analisi e sintesi: trovare le condizioni necessarie, guardarle tutte, vedere di ricondurle ad un problema gia' risolto, poi verificare tornando indietro, prendendo le conclusioni come ipotesi, che quello che abbiamo trovato soddisfa effettivamente alle domande del problema.
Allora, noi sappiamo che la circonferenza e' il luogo dei punti che hanno tutti uguale distanza da un certo punto detto centro; pertanto questo punto deve avere uguale distanza da A e B; allora cominciamo a tracciare l'asse del segmento AB; se il centro c'e', non lo sappiamo ancora, ma se c'e', deve trovarsi su questa retta, perche' tutti e soli i punti di questa retta hanno uguale distanza da A e da B; se c'e', deve trovarsi sull'altra retta, l'asse del segmento BC, perche' tutti e soli i punti di quella retta hanno uguale distanza da B e da C; allora, mettiamo insieme le condizioni, troviamo l'intersezione, nel senso geometrico del termine, di due rette, e quindi troviamo il punto. Se il centro esiste, deve essere questo punto, perche' soddisfa le condizioni necessarie che abbiamo dedotto dal problema.
Adesso torniamo indietro: prendiamo questo punto e dimostriamo che e' proprio il centro della circonferenza: Quel punto e' l'intersezione di due assi: in quanto si trova sul I asse e' ad uguale distanza da A e da B; in quanto si trova sul II e' a distanza uguale da B e da C; quindi e' il centro della circonferenza. Ecco la procedura di analisi e di sintesi. Viene percorsa in un senso e nell'altro.; di solito non la facciamo tanto lunga, pero' i discorsi sono sempre questi, deduzione di condizioni necessarie, deduzione che le condizioni necessarie sono anche sufficienti. di solito questo II passaggio logico e' fatto alla garibaldina, si chiama verifica.
Ad es. se devo trovare quel numero che moltiplicato per un altro mi da' un numero dato, faccio la divisione; ma magari ci sono inghippi, ad es. se faccio 2:3 con la macchinetta tascabile mi viene 0,6666666; poi faccio il prodotto per 3, mi viene 1,9999998; allora, o la macchinetta e' guasta, o l'aritmetica e' sbagliata, o la maestra ha sbagliato ad insegnare... quindi la verifica sarebbe molto spesso veramente necessaria, per toccare col dito se le cose vanno; pero' di solito la soluzione e' ottenuta con procedure talmente elementari che ci fidiamo perche' abbiamo fatto la verifica in molti casi precedenti. Altro es.: le prove delle operazioni. Di solito ci danno condizioni che sono solo necessarie, sarebbe bene magari coi ragazzini piu' svelti sottolineare questo aspetto del controllo, per es. della prova del 9 o altre; la verifica dovrebbe essere fatta anche con condizioni sufficienti, ma di solito i numeri che si hanno sono troppo grossi e non si arriva a fare i conti fino in fondo. Noi stiamo ora delineando una situazione ideale in cui si dovrebbero poter fare le cose; ma l'importante e' che l'insegnante abbia ben chiaro nella testa la differenza tra condizione necessaria e condizione sufficiente, che sappia che in linea di principio quando si arriva ad un risultato bisognerebbe verificare che esso corrisponde alle condizioni del problema.
Vorrei che questo tarlo del dubbio si insinuasse almeno nello spirito degli insegnanti, perche' la cosa che piu' mi interessa sottolineare e' che la matematica non e' una scienza di formule, ma di procedure razionali, che sono procedure logiche di deduzione

e procedure meccaniche di calcolo; quelle di calcolo ammettono errori materiali (che vanno controllati), ma le possiamo far fare anche alle macchine, anche se dobbiamo memorizzarne un po', altrimenti saremmo sempre bloccati. Quelle logiche vanno sempre fatte con la testa, bisogna sempre sapere in che momento ci troviamo (cond. necessaria o condizione sufficiente?).
Ci sono dei ragazzi che posti davanti ad un problema sono tentati di indovinare, cioe' di dare risposte a casaccio, spiando dalla faccia dela maestra se la risposta e' giusta o sbagliata; queste tentazioni se appena e' possibile vanno represse. Infatti fin dalla prima volta che ci siamo incontrati abbiamo detto che il momento veramente importante della conoscenza umana non e' la risposta, ma e' il perche' della risposta; non e' l'informazione, ma e' il fondamento logico dell'informazione; diversamante siamo al livello del disco del computer, che possiede milioni di informazioni, pero' non le sa spiegare. Il tentativo del ragazzino di dare risposte per sembrare piu' svelto degli altri purtroppo e' una degenerazione dei codiddetti "quiz" (deformazione inglese della parola latina "quaestio"), letame intellettuale che ci viene versato addosso dalla TV.
Se vogliamo educare alla razionalita' non ci interessa tanto la risposta quanto il fondamento della risposta, il quale e' dato o dalla dimostrazione o dalla verifica.
Inoltre non dobbiamo pensare che i problemi abbiano sempre una risposta unica: puo' esserci anche un problema che consiste nel trovare una classe di risposte ed una classe di non risposte.
Il momento della verifica comunque e' assolutamente ineliminabile, fosse pure limitato a mettere un numero nella macchinetta e a verificare che facendo l'operazione viene fuori il risultato che si voleva: anche questo e' un momento logico, che il calcolatore da solo non fa.
Tutti coloro che hanno fatto il liceo scientifico sanno benissimo che il caso tipico di questa fenomenologia e' dato dalla risoluzione dei problemi della geometria mediante l'algebra, perche' si rappresentano gli enti della geometria mediante coordinate, le relazioni della geometria si traducono in relazioni tra numeri, quindi il problema geometrico diventa un problema sui numeri. Come ad es. per trovare la vetta piu' alta delle Alpi uno fa l'elenco delle altezze, e il problema geografico diventa il problema matematico di trovare il numero piu' grande tra quelli elencati. E' una traduzione simbolica di un problema concreto: la struttura dei numeri altezze traduce la struttura della scala delle altezze geografiche, per cui se ho trovato un numero piu' grande di tutti gli altri sono sicuro che corrisponde alla vetta piu' alta. Questi discorsi, cioe' ragionare sui simboli fidandoci dei simboli, li utilizziamo continuamente, perche' i simboli sono tali e trovati cosi' bene che il confronto tra i numeri traduce esattamente il confronto tra le altezze; per cui siami sicuri che lavorando sui simboli abbiamo le informazioni giuste per gli oggetti che cerchiamo...
Dopodiche' in geometria analitica si risolve il problema algebrico: si gira la manovella dei calcoli, ci sono le formule per risolvere le equazioni, le risolvi, puoi perfino inserire i dati in un dischetto, ecc... Il momento piu' intelligente e difficile diventa quello della discussione, del valutare quale sia il significato concreto di quelle risposte in simboli che la macchina, se si tratta del computer, o la macchina dei calcoli, se

si tratta di applicazione delle regole dell'algebra, ci ha condotti a dare come condizione necessaria. Quella che veniva chiamata una volta la discussione dei problemi e' esattamente il momento che i Greci chiamavano di sintesi: verifica o controllo di quale sia la natura dell'informazione ottenuta solo come conseguenza necessaria dei dati del problema (questo discorso, mutatis mutandis, si applica a tutte le risposte razionali che vengono date a qualunque livello). Anche in questo caso siamo in parallelismo con l'operazione della dimostrazione: cosi' come nella dimostrazione continuiamo a dedurre condizioni necessarie finche' troviamo una verita' evidente, dopodiche da quella dobbiamo tornare indietro a verificare che e' proprio quella che volevamo e che non abbiamo trovato solo una condizione necessaria, nei problemi continuiamo a dedurre le condizioni necessarie finche' troviamo un certo risultato che si vede per se' o un problema che sappiamo risolvere (come prima quello di intersecare due rette non parallele tra di loro), che fa parte del nostro patrimonio di conoscenze, dopodiche dobbiamo tornare indietro, ragiõnando al contrario, per verificare un passo dopo l'altro che proprio quel punto che abbiamo trovato in base alla risoluzione di un problema elementarissimo di intersecare due rette non parallele, e' proprio quello che cercavamo in risposta al problema geometrico che ci e' stato posto.
Questi discorsi sono fatti per noi, non possono essere portati a scuola cosi'; il maestro deve sapere quando porre quelle domande o quelle correzioni che conducono ai ragionamenti che abbiamo cercato di analizzare, cioe' non accontentarsi della risposta in quanto tale, ma domandare le motivazioni, certo nei limiti in cui data l'eta' possono essere date le motivazioni stesse. Oppure nel caso in cui le motivazioni non fossero sufficienti, cercare di arrivare alla ricerca di motivazioni sufficienti. Ma se ad es. le ragazzine sono arrivate a darsi una certezza per conto loro, non mettiamo dei dubbi, ma sappiamo che questa non e' la dimostrazione, e' soltanto una estrapolazione di una verifica in cui loro hanno intuito una certa generalita'; a quella eta' e a quel livello e' sufficiente.
Purtroppo nell'enorme maggioranza le proprieta' dell'aritmetica devono essere solo constatate e non possono essere dimostrate. Ad es. se volessimo dimostrare la proprieta' commutativa dovremmo rifarci agli assiomi di Peano e fare la dimostrazione col principio di induzione, che e' una cosa diversa dalla pura constatazione del fatto che un certo numero di volte le cose tornano.

Qui si apre il discorso sull'<u>induzione</u>. Questo vocabolo "induzione" e' anch'esso utilizzato nel linguaggio comune e quindi puo' avere vari significati; in particolare nella matematica e nelle scienze ci sono due tipi di induzione. Quella cosiddetta matematica e' fondamento della dimostrazione di certe proprieta' dei numeri naturali (e poi si estende anche in altri campi..); si basa sul IV assioma di Peano, enunciato, codificato in formule e utilizzato metodicamente da Peano per dimostrare rigorosamente i teoremi fondamentali dell'aritmetica: proprieta' commutativa e associativa della somma, proprieta' commutativa e associativa del prodotto, proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma. Le sedicenti dimostrazioni che noi diamo in generale di queste proprieta' sono solo delle verifiche.

C'e' poi un altro tipo di induzione la quale viene utilizzata quasi necesariamente nelle scienze sperimentali e in tutte le scienze che concernono oggetti materiali, oppure nelle statistiche. Questa induzione come tutti sanno non e' una dimostrazione: semplicemente si tratta di verificare che un certo fenomeno sotto certe circostanze si verifica sempre (in statistica il discorso e' complicato); allora diciamo che siamo sicuri (o quasi) che si verifichera' sempre nelle stesse circostanze. E' il discorso che faceva Hume gia' tre secoli fa: siamo abituati a veder sorgere il sole tutte le mattine, non si e' mai verificato a memoria di qualunque uomo che il sole non si sia levato, e allora e' una legge generale che il sole tutte le mattine si leva: induzione. Noi siamo abituati a vedere i pianeti che girano in cielo in certe traiettorie, non si e' mai verificato che un pianeta abbia fatto un deragliamento, e allora diciamo: queste sono le leggi del moto dei pianeti. La discussione puo' essere buttata in metafisica, cosa che non vorrei: ma di questa natura sono le leggi che noi enunciamo nei riguardi della materia. Questo non significa ovviamente sminuire il significato della scienza, come Hume e gli Empiristi; io non sono di questo parere, io sono convinto che la nostra coscienza abbia una certa presa anche sugli oggetti materiali. Pero' sono anche convinto che la nostra conoscenza non sia esaustiva, cioe' non esaurisca fino in fondo tutta la ricchezza della materia; invece in geometria, quando noi diamo la definizione di un oggetto geometrico astratto, noi diamo tutto, perche' siamo in grado di dimostrare tutte le proprieta' a forza di logica, cioe' lo conosciamo perfettamente. Il caso degli oggetti materiali presenta sempre la possibilita' di approfondimenti, di ulteriori osservazioni, ulteriori enunciati generali o tendenti alla generalita', quindi la possibilita' di miglioramento delle nostre conoscenze, quando non di ribaltamento delle ipotesi che enunciamo per spiegare il comportamento delle cose che vediamo.
Caso storico e' quello della chimica. Prima di Lavoisier, cioe' verso la meta' del '700, esisteva la cosiddetta teoria del flogisto, per cui i metalli, che erano chiari lucenti e duri, venivano considerati come composti di due elementi, una base terrea e un'altra cosa che veniva chiamata flogisto. Dicevano: se metti un bel pezzo di ferro lucidato, ad es. una lama di sciabola, nel fuoco,, dopo un po' diventa tutta nera con bollicine; perche'? Il fuoco ha fatto scappare il flogisto, e' rimasta la base terrea che e' scura, nera ecc. Quindi il fenomeno che oggi spieghiamo con l'ossidazione era spiegato con la sottrazione del flogisto da parte del fuoco. Niente di male, perche' c'e' stato il sig.Lavoisier che ha pesato il ferro prima del fuoco e dopo il fuoco : dopo pesava di piu', non di meno, come avrebbe dovuto se il flogisto fosse scappato. Allora la teoria e' stata completamente ribaltata perche' il fenomeno e' stato spiegato dall'ossidazione, cioe' dall'aggiunta di ossigeno anziche' dalla sottrazione di qualcosa. I nostri nonni e bisnonni credevano di aver spiegato certi fenomeni dei metalli e invece non li avevano spiegati per niente. C'era l'induzione: ogni volta che metti il pezzo di ferro nel fuoco, esso diventa nero. Pero' era un'induzione che non rispondeva a verita'. Purtroppo di questo tipo sono tutte le induzioni che noi facciamo a partire dalle osservazioni sui fenomeni del mondo materiale. Non parliamo poi sui fenomeni umani perche' li' c'e' tutta la balzaneria degli

uomini.... Ma se parliamo di cose materiali, gli enti materiali ci possono sempre riservare delle sorprese.
Quindi l'induzione va fatta con il maggior numero possibile di casi, su quelli che sono i casi caratteristici, come aveva gia' codificato F.Bacone nel Novum Organum circa quattro secoli fa, cercando di identificare veramente le condizioni necessarie e non soltanto quelle accessorie. Anche noi quando cerchiamo di spiegare perche' il gas non si accende diciamo: o non viene il gas, o e' chiuso il rubinetto e io non lo so, o l'accendigas non funziona. Oppure, perche' i soldi mi sono scappati dalla tasca? ci deve essere un buco, o senza accorgermi ho rovesciato la tasca, e cosi' via.. Quando noi cerchiamo di spiegare le cose cerchiamo di trovarne le ragioni, e cerchiamo di codificarle nel maggior numero possibile di casi, senza naturalmente escludere (cosa che non si puo' mai fare) che magari si presentino degli altri casi diversi da quelli che noi abbiamo elencati , i quali invece mettono a repentaglio la nostra teoria, cioe' la spiegazione che abbiamo dato. Del resto se prendiamo un libro giallo, c'e' proprio codificata questa tipica procedura: le ipotesi vengono chiamate sospetti, il detective acuto trae tutte le deduzioni, va a verificarle ecc ecc...:se fosse stato Tizio, la ferita si dovrebbe presentare cosi' e cosi', ma Tizio e' mancino, percio' non puo' essere stato lui, ecc. E' il nostro modo abituale di spiegare le cose, cioe' di trovare delle ragioni che motivino fino in fondo come le cose si presentano.

3/12/90

IV incontro col prof. Manara
(appunti non rivisti dall'Autore)

-A.Davoli Abbiamo pensato di iniziare questo incontro ascoltando le vostre reazioni alle lezioni precedenti, dubbi esperienze ecc., affinche' possiate confrontarvi direttamente col prof. Manara.

-Anna M. Io insegno alle medie. La volta scorsa, a proposito di dimostrazione, si diceva che c'e' un viaggio di andata e uno di ritorno... Io in III sto facendo il teorema di Euclide, e sul nostro testo, a differenza degli altri che danno solo delle verifiche, c'e' la dimostrazione. Io pero' non riesco a capire quale sia il viaggio di ritorno... Altra domanda: si e' detto che la geometria non ha bisogno di figure perche' lavora sugli enti geometrici. Noi invece come lavoro specifico insistiamo con i ragazzi nell'affronto del problema geometrico col disegno delle figure; se un ragazzo dice: non ho fatto il disegno perche' l'ho immaginato, noi annotiamo che manca il disegno. Vorrei sapere se e' necessario...

-prof.M. Forse dico le cose in maniera troppo dura ed esagerata. Vorrei rettificare, altrimenti rischiamo di sbandare sulla destra anziche' sulla sinistra.
Ho insistito sul fatto che la figura, il solo accostamento delle figure o il solo disegno, non e' argomento logico, non e' dimostrazione. A questo si riferiva il discorso di Platone. Pero' non e' che non si debbano usare le figure o cercare di fare le figure precise, e' che bisogna cercare di arrivare in ogni caso al ragionamento, al dunque, non in base alla figura. Diversamente, si possono incontrare vari paradossi, ad es. quello del quadretto che sparisce e risulta 64=65 (v. articolo sul Periodico di matematiche).
Non ho detto quindi di non fare figure, anzi e' giusto che quando un ragazzo dice: me lo immagino, gli si dica: fammi la figura; e' un modo di controllare se veramente ha capito il significato delle parole, puo' cioe' essere un controllo del lessico. Anche nel compito del Liceo Scientifico si enuncia un problema, poi il ragazzo deve fare la figura, e per fare la figura deve aver capito quello che c'e' scritto e saperlo tradurre in rapporti spaziali.
I pericoli sono due: il primo, che i ragazzi (o noi stessi) ci fissiamo su una data figura pensando che rappresenti il caso generale anziche' un caso particolare; questa e' la trappola della fissita' funzionale (la teoria psicologica della Gestalt ne fa addirittura un capitolo): poiche' noi presentiamo le cose con una determinata cornice, spesso prendiamo la cornice per il quadro o pensiamo che la cornice sia essenziale. A questo pericolo si puo' cercare di ovviare ad es. con gli audiovisivi, coi filmini, che presentano una quantita' di situazioni e di circostanze che uno non si era mai neanche immaginato. Allora uno deve dire: vediamo se la figura che ho fatto da' veramente la massima generalita' all'enunciato o no. Quando ero studente ho scoperto che il quadrangolo puo' essere anche non convesso: per certi teoremi di

geometria proiettiva occorreva anche questo caso, l'altro non era il caso generale.
L'altro pericolo e' confondere l'illustrazione con il ragionamento. Qui e' il momento in cui bisogna sottolineare la differenza tra il passaggio astratto della mente che dice: dunque, per queste buone ragioni deve succedere questo e quest'altro, e l'occhio che dice: dunque si vede che i tre punti sono allineati. Esempio classico quello del grande incisore Durer, che ha scritto che il lato dell'ettagono regolare e' la meta' del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza. Non e' vero: i due problemi astratti sono diversi; se si fanno i conti, si trova una differenza del 2 per 1000, cioe' su un cerchio col diametro di un metro c'e' la differenza di 2 mm, la larghezza della punta di una matita. E' chiaro che col disegno uno pensi che le cose tornano, ma il disegno e' solo un appoggio o una guida al ragionamento che bisogna fare.
Altra tentazione -molto grossa se ci si basa sul disegno- cui bisogna fare attenzione e' considerare certe differenze trascurabili in assoluto: 2 per 1000 non conta, lasciamo perdere. In matematica non esistono quantita' piccole o grandi in assoluto; quel 2 per 1000 che non si vede se faccio il disegno con la matita puo' diventare un errore pesantissimo se devo lavorare su una circonferenza col diametro della sfera terrestre o pari alla distanza terra-sole; allora la differenza e' di migliaia di chilometri e io sbaglio a tirare un missile, che invece di tornare a casa se ne resta nello spazio. La cosa che per es. e' spesso sbagliata sui libri di matematica e' dare certi numeri che non sono precisi come numeri precisi: i cosiddetti numeri fissi , come l'altezza del triangolo equilatero, l'apotema dell'esagono regolare, come se fosse un numero razionale; invece bisogna mettere dei puntini, i quali dicono che quel valore non e' preciso, e' sempre indefinitamente migliorabile. 1/10000 ad es., se lo moltiplico per dei miliardi e' sempre piu' di mille. Le banche sanno benissimo che il valore di un prodotto puo' essere grande anche se uno dei fattori e' molto piccolo, ma l'altro e' molto grande; le banche ti rubano pochi millesimi su ogni lira pero' moltiplicano e fanno i miliardi. Questo e' il discorso che ho fatto con Clara Bozzolo e con un gruppo di maestre che mi hanno posto il problema della continuita' in geometria, delle figure e delle misure. Se un numero e' razionale, e' razionale e basta, ma se non lo e', non posso darne il valore come se fosse razionale. Come Vittorio Messori che un giorno ha scritto 4 colonnine sulla sezione aurea dicendo che e' un numero magico (e magari e' anche vero) e che vale 0,607 (con tre cifre decimali precise). Non e' vero! Quello e' un numero irrazionale, cioe' un numero con infinite cifre. Se lo dai cosi', lo dai approssimato all'1 per mille. Per un disegno non ci si accorge, ma magari per altri bisogni e' necessaria una maggiore precisione. L'importante e' che io abbia continuamente una procedura matematica precisa per migliorare ogni volta le informazioni e trovarne altre di cui ho bisogno.
Sulle figure quindi: non ho detto di non farle, ma di stare attenti a non farle sempre uguali cioe' a non costruire delle fissita' funzionali e non fissare l'accessorio come se fosse l'essenziale, e a non fissare la fantasia degli utenti sui casi particolari. Naturalmente tu gli dai l'enunciato e lui deve fare la figura, o meglio una figura, e dobbiamo dirgli che e' una

figura e che ce ne possono essere magari tante altre, se non altro ad es. in altre posizioni.
Per quanto riguarda poi il discorso dell'analisi e della sintesi, il discorso all'indietro, come tu dici, e' quasi sempre trascurato e dimenticato, perche' si riduce ad una verifica; ma la verifica va fatta, cioe' in teoria bisognerebbe prendere la tesi come ipotesi e dimostrare l'ipotesi, poi la II tesi come ipotesi e tornare indietro, proprio in modis et formis; in generale e' o una verifica o una piccola discussione, come si fa in geometria analitica, dove si trasforma il problema, si deduce (quello e' il momento dell'analisi), si trovano delle soluzioni, magari piu' di una, poi si va a vedere quali vanno bene. Per es. il problema domandava la lunghezza di un segmento in valore assoluto, vengono due soluzioni, una positiva e una negativa, quella negativa in questo problema non ha senso, prendiamo quella positiva; questo e' il momento della sintesi, in generale si chiama discussione. Quindi quando io trovo un risultato, non dovrei fermarmi li', dovrei almeno dire: cosi' si vede -o meglio si verifica- che questa e' la soluzione del problema. Non e' detto che occorra sempre fare il passaggio logico inverso, pero' almeno una piccola discussione o una verifica del fatto che cio' che e' stato trovato e' la risposta al problema: questo e' gia' il momento della sintesi.

-Anna M. Volevo fare una domanda riguardo alla geometria. Noi lavoriamo molto sui segmenti e sulle operazioni sui segmenti in termini geometrici: costruzione del segmento somma, del segmento differenza ecc.; era stata un'indicazione dell'Adriana, che prima di lavorare sulle misure si lavorasse proprio sugli enti, sulla loro costruzione. Volevo ricuperare il valore di quell'indicazione.

-prof.M. Sulla geometria dovremo lavorare, prima o poi ci sara' una discussione piu' completa.

-Enrica .....le stimolazioni che Lei mi ha dato in questi anni sono state parecchie, tra le ultime quella sui problemi. E' una questione grossa per le Elementari: o si cade nel solito tran-tran di problemi banali, sotto la pressione dei programmi che ci chiedono le cose piu' assurde e ci mettono in ansia; corriamo cosi' il rischio di far fare molti problemini dei soliti senza accertarci che i bambini abbiano posto in atto veramente un ragionamento o comunque sappiano motivare il loro cammino e le loro scelte. Io venendo qui da alcuni anni ho imparato a valorizzare questi aspetti; i bambini riescono poi a fare osservazioni e precisazioni. Volevo chiederle, a proposito di problemi anche non tradizionali, se puo' dare altre indicazioni al nostro lavoro.
Poi volevo rifarmi a quell'esperienza che avevo riportato la volta scorsa circa la somma di due numeri dispari che e' un numero pari. Lei aveva detto che non le sembrava il caso di portare ai bambini la dimostrazione completa, pero' a me veniva da pensare che, per il lavoro che abbiamo svolto in questi anni di grossa esperienza e precisazione sulle cifre e sul discorso decimale, mi pareva che fossero pronti a capirla. Il discorso per combinazione e' proprio andato avanti; infatti ripensandoci dopo alcuni giorni una bambina ha detto: ma siamo proprio sicuri che tutti i numeri dispari messi

insieme due alla volta diano un numero pari? Io ho risposto: Allora come facciamo? E Michela: proviamo con i numeri che hanno una sola cifra. Abbiamo cercato quali sono i numeri dispari con una sola cifra, li abbiamo scritti alla lavagna, hanno cominciato un po' in disordine ad esaminarli. Allora sempre Michela dice: prendiamoli uno per uno. Abbiamo scritto le 45 possibilita'. "E' vero allora quello che ha detto Michela?" "Si, ma noi non conosciamo solo questi numeri. C'e' anche per es. 55+55" Era saltato loro all'occhio (loro visualizzano le quantita') che 55 e 55 sono uguali, che e' possibile accoppiare le quantita' e ottenere un numero pari. Hanno provato con grosse cifre e sono arrivati a smembrare, a fare la scomposizione classica (benche' fossero abituati in un altro modo), finche' sempre questa bambina dice:: eh si, le decine sono fatte di 10 unita', e 10 unita' le puoi sempre dividere per 2. Poi abbiamo preso numeri piu' grandi: "come abbiamo fatto con 5 e 5 possiamo fare anche 50 e 50 che fanno 100", e via. Mi pare che con il tipo di esperienza cui siamo stati abituati nel lavoro di questi anni i bambini siano portati a precisare. E'comunque uno dei nostri obiettivi maggiori, anche se a volte siamo presi dal vortice di farli esercitare, di fare problemi in piu'..
Un altro esempio dell'altro giorno: avevo appena avviato il discorso della moltiplicazione e stavo facendo religione. Dovevo mostrare un disegno ai bambini: "non posso mostrarvelo, devo prima farlo ingrandire" "Come fai ad ingrandirlo?" "Non ho tempo, lo faro' ingrandire con la fotocopiatrice" "Ma dai Enrica, prendi un foglio piu' grande" "E poi?" "Lo allunghi e lo allarghi". Scrivo alla lavagna: allungare e allargare.Poi? "Facciamo una prova: io prendo qualcosa e voi mi dite come devo fare ad ingrandirla. Avete detto: allungare ed allargare" (sbaglio appositamente) "Ma no Enrica, non vedi che l'hai schiacciata?" "Allora come si fa?" "Devi prendere le misure" "Le misure? ma noi non le abbiamo fatte" "Ma si Enrica prendi il righello.." "Uscite voi perche' io non so come fare"
-prof.M. E' bellissimo...
-Enrica Hanno registrato le misure. "E adesso cosa facciamo?" "Facciamola due volte". Io scrivo: 13 due volte. "Ma dai Enrica scrivilo piu' in fretta" "Come si fa?" "Ma scrivi "per",no?" "Ah e' vero, c'e' la moltiplicazione: allora per ingrandire possiamo usare la moltiplicazione" "Eh si, perche' lo fai 2 o 3 volte, quanto vuoi tu, no?" Questo aspetto della moltiplicazione come possibilita' di ingrandimento non l'avevamo ancora affrontato, sarebbe stato un passo ulteriore, ma e' uscito da loro. E' questo che Lei diceva? Precisare, far precisare ai bambini, chiedere loro la motivazione e la spiegazione, questo tutto sommato li rende anche piu' attenti di fronte a qualunque attivita' si svolga.

-prof.M. L'insegnante deve sapere dove vuole condurli cioe' deve aver presente la meta che e' quella di una razionalita' esplicita e precisa. Pero' questo discorso, come e' nata l'esigenza di una razionalizzazione rigorosa anziche' della sola generalizzazione sperimentale, e' secondo me una cosa interessantissima, perche' si vede che anche il bambino distingue tra l'induzione fisica e l'induzione matematica, cioe' tra quello che e' una generalizzazione fatta sui casi sperimentati soltanto: "ma l'abbiamo proprio provato su tutti?" e invece la certezza che mi da' la dimostrazione. Come lei vede e' molto diverso che quell'esigenza nasca anche da una sola persona dell'uditorio piuttosto che venga scaraventata addosso dall'insegnante .

-Enrica Col lavoro di questi anni si sfruttano tantissimo le occasioni offerte dai bambini...

-prof.M. Direi anche un'altra cosa: come lei vede, questa gente ragiona, non e' contenta solo della verifica dei casi particolari, vuole la dimostrazione rigorosa; questo e' ben piu' valido come insegnamento di logica di qualunque lezione esplicita di logica uno facesse, perche' e' manifestazione di esigenza di certezza da parte loro piuttosto che insegnamento teorico: per ragionare devi fare cosi' o cosa'... "Ma io non ho voglia di ragionare, mi piace giocare..." Anzi, anche il gioco, come abbiamo provato ad Usmate, e' estremamente importante come allenamento a regole che devono essere rispettate e alla coerenza. Quando faccio un gioco di carte o qualunque altro gioco, li' ci sono regole, che magari hanno inventato loro stessi, e allora sono piu' attenti a rispettarle, pero' importante e' questa coerenza, che e' insegnamento di logica, anche se non c'e' il discorso formale.
L'altro discorso, quello dell'ingrandimento: dall'assemblea e' nato il problema della similitudine, cioe' il concetto di forma e di grandezza: figure che possono essere di uguale forma e di diversa grandezza. I ragazzi vedono tutti i giorni le fotografie, qualcuno meno addormentato degli altri si domanda come si fa; naturalmente, come ha detto giustamente lei, l'insegnante deve sapere dove li vuole pilotare, cioe' da queste domande che nascono, che cosa vuol tirar fuori per aiutarli alla precisazione e al ragionamento rigoroso. E' molto piu' valido un discorso di questo genere di qualunque altro discorso sulla similitudine il maestro facesse senza che i ragazzi ne sentano la necessita'; questo che lei dice e' una conferma esatta di quello che abbiamo sempre detto, cioe' che la logica noi la dobbiamo far vivere, come coerenza, precisione di rappresentazione, deduzione rigorosa; meglio se le occasioni nascono dall'assemblea...
Vorrei pero' tranquillizzarla per quanto riguarda le sue conoscenze di matematica: secondo me la matematica della scuola magistrale non e' insufficiente come contenuti per quello che dobbiamo dare ai ragzzini della scuola elementare, e' purtroppo insufficiente come spirito, perche' a volte viene insegnata come un insieme di regole e non come risposta alla ricerca profonda di certezza che invece emenrge in esperienze come quelle di cui sopra. Come lei ha visto, la dimostrazione che la somma di due numeri dispari e' un numero pari (e ci sono arrivati anche i bambini) si basa sulle convenzioni di scrittura dei numeri, non e' necessaria la matematica di un laureato in matematica. Vede dunque che l'importante sono i collegamenti, cioe' lo spirito con cui vogliamo insegnare questo tipo di ragionamento. Il fatto che sia nato dalla classe e' molto importante, dimostra che la ricerca della certezza e' una cosa naturale anche per i ragazzini, e che essi sanno ragionare. Al massimo si poteva far loro il discorso della contronominale, cioe' dire: la somma di due dispari e' sempre pari, bene; viceversa, se ti dessi un numero dispari, puo' essere la somma di due dispari? No, perche' se nego la tesi nego anche l'ipotesi; siccome la somma di due dispari e' sempre pari, se prendo un numero che non e' pari non puo' essere la somma di due dispari. E' un ragionamento che facciamo tutti i giorni, ne

abbiamo parlato anche l'altra volta, bisogna tener presente che e' il ragionamento della contronominale, se vogliamo la dimostrazione per assurdo: se da una certa ipotesi consegue necessariamenta una certa tesi, nego la condizione necessaria, ovviamente l'ipotesi non puo' essere vera. Bisognerebbe a volte cogliere l'occasione, non su questo teorema ma su un altro qualunque, per far loro vedere qual e' questo tipo di ragionamento che noi utilizziamo regolarmente quando ragioniamo bene, ma che e' un passo in piu' rispetto alla dimostrazione diretta. E' il momento dell'analisi: se da un'ipotesi consegue una tesi, dalla negazione della tesi consegue la negazione dell'ipotesi: "tutti gli onesti votano per il mio partito, tu non hai votato per il mio partito, dunque non sei onesto". Queste sono lezioni di logica, se il maestro sa cogliere l'occasione, senza dirglielo, perche' poi magari il ragazzo si spaventa. Come se la maestra dicesse: state attenti, vi spiego le frazioni che sono difficili; le frazioni diventano una cosa difficile. Come quando chiamano il teorema di Pitagora il ponte dell'asino, e uno si fa gli incubi di notte...

-Enrica Ancora sui problemi: e' una questione aperta; nel corso degli anni ci siamo sentite interpellate, abbiamo cercato una serie di problemi, di situazioni...

-prof.M. Quando lavoravo a Trieste con le scuole dell' Ancifap avevo fatto una raccolta di problemi non standard, da risolvere semplicemente con il buonsenso e non con l'aritmetica, presi dalla settimana enigmistica ecc. Se loro vogliono, li cerco, li porto qui e ne discutiamo...Non voglio imporre questa procedura ne' certi problemi che richiedono maturita' mentale....Devono essere loro a decidere.

-(Domanda) Il discorso sul simbolismo e' abbastanza complesso, e anche se si cerca di farlo scaturire e maturare attraverso varie esperienze, tuttavia si incontrano difficolta'. Volevo domandare, soprattutto per i bambini che hanno qualche problema in piu', come intervenire per aiutarli nel discorso simbolico, in modo pero' che non diventi un puro addestramento.

-prof.M. Questo e' un capitolo molto duro. Non mi sento di dare regole generali, perche' sono convinto che una delle difficolta' della matematica sia proprio che usa simboli artificiali. Questa e' una mia lunga esperienza di insegnamento. Il sig. Cocchetti, proprietario di garage, veniva a lezione da me per passare gli esami del Politecnico. Aveva tipicamente la difficolta' di cui parliamo: una fantasia straordinaria per le cose concrete, motori ecc, ma anche nei problemi di statica (calcolo di una capriata: un tetto fatto in un certo modo lo carichi con una certa forza, devi calcolare gli sforzi, se occore un puntone o un tirante) arrivava molto bene . Quando si trattava di mettere in equazione, dall'immagine alla traduzione simbolica, non riusciva, o riusciva con molta difficolta'. C'era un qualcosa che faceva presa diretta sulla sua immaginazione e capacita' logica, che si appoggiava pero' solo sulle immagini concrete. Quando invece traducevamo con simboli, cioe' con immagini puramente convenzionali, si bloccava, forse anche per paura della trigonometria o cose del genere. Sono 40 anni che mi domando: come mai una persona intelligente, capace di immaginazione e di ragionamento rigoroso, si trova spaesata di fronte ai simboli artificiali? Esiste evidentemente uno scalino di capacita' di decifrazione per cui certe rappresentazioni convenzionali, pur non indecifrabili, sono particolarmente fastidiose per alcune persone. E' un fenomeno psicologico molto diffuso, che non e' segno di stupidita' o di intelligenza, ma di una particolare abilita' di decifrazione (matematica come cifrare e decifrare). Ho gia' detto altre volte: la notazione romana del numero tre, III, e' chiara; ma in notazione araba che cosa si vede? Il simbolo 3 puo' sembrare un serpente, un lombrico schiacciato, non si capisce. Si vede quindi che via via che la matematica diventa piu' ricca di simboli diventa piu' difficile, non nel senso dell'intelligenza, ma perche' offre particolare difficolta' alla decifrazione di un simbolismo convenzionale. Quando certi miei colleghi mi dicono: non ho mai capito la matematica, io andando a sondare devo dire: ha avuto una reazione di rigetto non della matematica come tale ma del simbolismo matematico, astratto e convenzionale, che non ha presa sulla realta'.

-(domanda) ..in tutto questo discorso di linguaggio, di verbalizzazione, di esplicitazione di quello che il bambino usa e legge, chiedo se non sia il caso, per aiutare i bambini, di intervenire e lavorare sulla trasposizione simbolica delle operazioni concrete che fanno.

-prof.M. Non sono psicologo, ma credo che una strada di uscita sia cercare di togliere complessi di inferiorita' e cercare di facilitare il passaggio al simbolismo convenzionale; ed e' un problema psicologico, non di carattere concettuale ne' mentale. Caso tipico quello del giurista; ricordo il mio caro amico prof. Fabio Lanfranchi, rettore dell'Universita' di Modena: quando si discuteva, vedeva subito l'essenza del problema, vedeva la norma, la inquadrava, faceva il contratto e lo metteva giu'. Io dicevo: hai fatto un ragionamento matematico. "Per amor del cielo! Non ho mai capito la matematica!" "Hai lavorato con le parole anziche' coi simboli". Come quelli che inventano le canzoni ma non conoscono le note, e devono andare da un musicista a farsele mettere giu'.
Vorrei quindi consigliare la prudenza nel giudicare il ritardo mentale o altro, quando si tratta forse di difficolta' di carattere neurologico, se non psicologico, cioe' ad un livello ancora inferiore di decodificazione. Il buonsenso esige di cercare di fare esercizi, ma non troppo complicati. Ho gia' ricordato l'episodio del figlio di un mio caro amico, che prendeva sempre 4 in matematica; il padre era disperato: studia solo matematica e prende sempre 4, non vuol piu' andare a scuola. Abbiamo scoperto che la prof. di matematica gli faceva fare esercizi numerici molto complicati, che lui regolarmente sbagliava. Allora l'ha preso in custodia mia moglie, che in due mesi l'ha portatto all'8. Era la prof. che non sapeva che cosa fosse la matematica: non e' sulla pura abilita' cifratoria e decifratoria che si giudica il ragionamento mentale. Cosi' rifiuto la classificazione dei cervelli con l'I.Q. solo sulla base della capacita' di usare il simbolismo matematico, o per lo meno ci credo meno di tanti psicologi. Inoltre non credo che la capacita' matematica sia pura manovra dell'algebra.
Vorrei insistere che purtroppo dobbiamo insegnare queste

convenzioni perche' nella vita civile sono necessarie; tuttavia vorrei distinguere tra la comprensione e l'addestramento. Non esiste pero' una strategia unitaria. Se andremo ancora ad Usmate a lavorare con quei ragazzi nel momento del ricupero cercheremo una strategia; alla matematica pero' non si puo' togliere questo aspetto del simbolismo; ma poiche' anche il linguaggio comune e' simbolo, occorrerebbe curare contemporaneamente tutto il fronte dell'espressione, perche' se uno guadagna sul fronte della matematica tende anche ad esprimersi con maggior chiarezza e precisione, a mettere in ordine i propri pensieri; e viceversa, se uno e' abituato ad esprimersi con chiarezza, anche il linguaggio matematico gli riesce con minor difficolta'. "Ce l'ho sulla punta della lingua ma non riesco a dirlo": no, se lo sai bene devi saperlo dire. Quando uno fa lo sforzo di dire le cose, anche solo a se stesso (ad es. cercare di scriverle) si acccorge di salti, di cose non chiare, di idee che sembravano brillanti ed invece...
Il pensiero matematico soprattutto di oggi ha questa difficolta' della convenzionalita' dell'espresione, cosa che non si verifica nella geometria, almeno quella tradizionale, che non rende necessario tutto l'apparato algebrico ecc.: uno deve ragionare sulla figura, sui rapporti delle cose immaginate, senza bisogno di tradurre in simboli. E questo, non solo il calcolo meccanico, puo' essere elemento di giudizio... Ormai i calcoli algebrici li fanno i calcolatori; forse tra poco ci saranno macchine che faranno l'analisi logica dei problemi e li risolveranno...

-E.Zago A proposito del simbolo, mi viene in mente il problema dell'usare un linguaggio convenzionale, di cui la societa' di oggi e' piena. Noi per fare certi ragionamenti in classe possiamo usare simboli nostri, che decidiamo noi; esistono poi pero' simboli convenzionali che non vanno bene solo per la nostra classe ma per tutti. Al biennio emerge poi che non vengono accettate le regole convenzionali: ad es. io davo un prodotto (notevole) di polinomi, con una scomposizione sbagliata, in cui dovevano segnalare l'errore; loro camuffavano il dato, in modo che la soluzione risultasse giusta. "Ma quello e' il dato, non potete cambiarlo!" "Ma noi diciamo cosi'".

-prof.M. In quello che lei ha detto ci sono vari piani di considerazioni che meritano molta riflessione.
La prima e' che quando noi ragioniamo in qualunque modo siamo portati a simbolizzare: il "verbum", il concetto, lo diciamo a noi stessi (come diceva la filosofia medievale), magari lo rappresentiamo con simboli validi solo per noi; e' quello che i filosofi chiamano la "species expressa", il concetto, una certa idea, che possiamo simbolizzare in vari modi purche' il simbolismo sia coerente (cioe' non si usi lo stesso simbolo per concetti diversi). Il simbolo diventa mano a mano piu' potente in dipendenza dal fatto che la sua sintassi, cioe' le convenzioni con cui lo usiamo, ci permetta di tradurre le leggi della nostra mente. Come ho gia' detto altre volte, se usiamo i numeri per indicare le linee tranviarie, non e' detto che la linea 2 faccia un percorso doppio della linea 1; il numero rappresenta solo una certa classe di equivalenza di vetture. Anche quando usiamo simboli personali possiamo avere la mano piu' o meno felice, a seconda che il simbolo ci serva solo per occupare un posto sulla scacchiera o abbia la possibilita' di avere ramificazioni

sintattiche in modo che ci aiuti a ragionare bene. I diagrammi di Eulero non devono solo rappresentare rapporti tra gli insiemi, ma ci devono aiutare a ragionare. Riflettendo quindi su quanto lei dice, da questo punto di vista il simbolo e' arbitrario e lo possiamo scegliere noi, come il pastore analfabeta che contava le pecore ammucchiando i sassi; per lui e' un simbolismo, altri non ci sa leggere, vede un mucchio di pietre e basta. Per lui e' un simbolo adeguato, strettamente personale, che gli da' le informazioni di cui ha bisogno.
L'altro passo che lei ha messo in evidenza e' che il simbolo ci serve per la comunicazione: deve venire accettato ed usato dagli altri come lo usiamo noi. Qui nasce un ulteriore scoglio dell'insegnamento della matematica: se inventiamo simboli che sono coerenti ma non sono universalmente accettati. "Misura la lunghezza in palmi": ma di Pietro o di Giovanni? Il simbolo qui diventa strumento non solo di rappresentazione del concetto, ma di comunicazione del concetto; qui la difficolta' e' di imparare bene le convenzioni che sono state universalmente accettate. Abbiamo esempi tutti i giorni di tali resistenze e difficolta': le quote degli aerei sono misurate in piedi dalle torri di controllo di tutto il mondo, nelle stampanti la distanza tra le righe e' data in quarti di pollice. Discorsi che dimostrano l'ulteriore difficolta' della lettura dei simboli che non sono spontanei per noi ma imposti dal di fuori. Quando studiavo il tedesco mi era particolarmente difficile leggere il carattere gotico...; i bambini scozzesi manovrano benissimo le misure in pollici.
La potenza la profondita' e l'utilita' del simbolo nasce dalla possibilita' di farlo lavorare per dedurre: deve essere un aiuto per il nostro ragionamento. Riassumendo, l'utilizzazione del simbolo della matematica e' importantissima per due aspetti:
-la designazione precisa degli oggetti
-la possibilita' di dedurre con certezza;
le operazioni aritmetiche infatti sono deduzioni, che facciamo a macchina, tant'e' vero che le facciamo fare dalle macchine; e questo dimostra il potere del simbolo: provate a fare delle moltiplicazioni con numeri rappresentati da cifre romane e vi accorgerete della differenza tra avere simboli non intelligenti e intelligenti. Ammiro Archimede perche' ha fatto operazioni spaventose con un simbolismo quanto mai balordo. Lo stesso Tolomeo: aveva calcolato il valore delle funzioni trigonometriche in base 60: sono cose assolutamente straordinarie per gente che non posedeva simbolismi potenti come il nostro. Il simbolo e' una necessita' non solo per riuscire a chiarire a noi stessi il nostro pensiero, ma soprattutto per la comunicazione. L'uso di un simbolismo potente e diffuso e' quello che fa la civilta'.
Pero' questa difficolta' del simbolismo viene dalla necessita' della decifrazione. Noi dobbiamo cercare di aiutare anche con l'addestramento i ragazzini a superare questa difficolta': il momento addestrativo pero' qualcuno l'accetta volentieri, altri meno. Cifrare e decifrare puo' voler dire la scioltezza di certi circuiti mentali, ma non e'ancora il momento delle idee fondamentali; e' estremamente utile, quasi indispensabile per la comunicazione e la vita civile, ma la matematica non sta tutta li'. Come il ragazo di cui dicevo prima, a cui e' bastato togliere il complesso di inferiorita' dei calcoli perche' prendesse 8. Il mondo e' complicato, non possiamo fidarci di un solo metro di giudizio per una questione che richiede una discussione su un

raggio molto piu' ampio.

-(domanda) A me e' capitato in I, quando non avevo ancora intenzione di fare le frazioni, ma in mensa mangiavamo le mele, e io chiedevo: ne vuoi un quarto o meta'? C'era una bilancia; abbiamo cominciato a pesarle per vedere se i 4 quarti erano equivalenti in peso alla mela intera. Un bambino pignolo diceva che non era possibile perche' nel taglio andava perduta qualche goccia...

-prof.M. Un terzo, un mezzo, un quarto fa parte del linguaggio comune. L'esperienza interessante e' prendere questa esperienza comune e portarla via via alla precisazione, alla convenzione, alla espressione rigorosa, che e' quello che facciamo col linguaggio comune. Vengono che parlano gia', e non dicono cose a vanvera, ma esprimono idee; noi gli insegnamo la grammatica, la morfologia, il plurale, ecc ecc, e nella loro testa non devono diventare nozioni in piu', ma il riconoscimento di quello che gia' fanno: perche' gia' distinguono tra maschile e femminile, ecc. Noi non insegnamo tutta la lingua, ma diamo strumenti espressivi sempre piu' precisi e potenti e legati tra di loro, in modo che la capacita' espressiva cresca. Lo stesso -mutatis mutandis- dovrebbe avvenire con la matematica: questi concetti elementari delle frazioni, chi non li ha (almeno fino ai primi denominatori, 1 2 3 4 5)? Un po' alla volta dobbiamo portarli a livello scientifico, ma non e' che dobbiamo fare una tabula rasa e cominciare da capo, perche' allora il discorso diventa complicato. Ne' dobbiamo rimanere a livello puramente empirico, come si diceva prima a proposito della geometria, se si usa solo il disegno come argomento di conclusione: argomento di conclusione e' il ragionamento, partendo pero' da quelle che sono le intuizioni del disegno, cioe' della situazione spaziale, generalizzandole, concettuelizzandole, rendendole capaci di deduzione rigorosa. Il momento in cui il linguaggio diventa capacita' deduttiva, diventa concetto generale, e' il momento veramente umano. Tutti sappiamo: 4 sono le gambe del tavolo, 4 gli evangelisti, 4 i semi delle carte, ecc., ma il numero 4 e' una cosa diversa, e' l'universale che si applica a tutti questi insiemi. Sono cose naturali, che dobbiamo pian pianino condurre all'espressione rigorosa. Qui c'e' l'episodio storico del giovane Pascal che si era costruito la geometria da solo, pero' usava un vocabolario personale, perche' non aveva mai comunicato queste idee, solo il padre ha saputo riconoscere il vocabolario convenzionale della geometria; lui pero' era capace di dedurre, faceva tutto... Le regole di lingua sono quelle che ci permettono non solo di pensare e di conoscere, ma anche di comunicare con gli altri... Noi non riusciamo a capire come si forma una lingua, come si forma un insieme di convenzioni: e'un discorso troppo complicato, tant'e' che di linguaggi simbolici della logica ce ne sono in giro almeno 4 tipi, inventati da persone diverse che non erano in comunicazione tra di loro; pero' le esigenze della deduzione uno ce le ritrova, espresse in maniera diversa ma le ritrova. C'e' un fondo di esigenza comune e ci sono poi varie realizzazioni espresse attraverso le convenzioni che scegliamo...
Insisto sull'essenziale: sul non dare tante cose salvo che siano assolutamente necessarie. La matematica e' bella perche' e' semplice, quindi diamo loro solo le cose semplici ed elementari,

quelle formative del cervello...

14/1/91
V incontro col prof.Manara
(appunti non rivisti dall'Autore)

prof.M. La raccolta dei problemi concreti alla prossima volta. Ora vorrei riprendere l'esempio della volta scorsa, del quadrato e del rettangolo apparentemente equiscomponibili, per cui guardando la figura risulterebbe 64=65. Tale paradosso si puo' ottenere per tutti i numeri della successione di Fibonacci (quella in cui ogni numero e' uguale alla somma dei due precedenti: 0,1,1,3,5,8,13,21,34,55,89,...; ovvero:
$x(n) + x(n+1) = x(n+2)$)
di posto pari. Nel caso del nostro esempio l'8: e la relazione che vale tra i numeri 5, 8, e 13 e': $8^2=5\times13 - 1$. Il trucco e' che 3 punti che sembrano sulla diagonale del rettangolo in realta' non sono allineati: le pendenze (rapporto tra i cateti) delle due ipotenuse non sono uguali; nel nostro caso sono 3/8 e 2/5, la differenza e' di 1/40 ; andando avanti nel posto della successione di Fibonacci, tale differenza diminuisce. E' un esempio della fallacia della cosiddetta geometria sperimentale; l'aspetto educativo di questo esempio e' che non ci si puo' basare sulla figura (nella scomposizione in pezzi del rettangolo c'e' un parallelogrammo schiacciatissimo che non compare nella figura).
I numeri della successione di Fibonacci si possono esprimere anche con una formula: $x(n)=1/\sqrt{5}\ ((1+\sqrt{5}/2)^n-(1-\sqrt{5}/2)^n)$
Nonostante la presenza in tale formula di numeri irrazionali, facendo i conti con l'algebra si ottengono degli interi. Facendo invece i conti con il calcolatore, che approssima gli irrazionali con un numero finito di cifre, si ottiene un errore, che per es. per il numero di posto 30 e' di 0,5 (da 32040 a 32040,5). E' possibile quindi che sia necessario interpretare i risultati concreti dati dalle formule. Questo discorso ci servira' quando parleremo dei numeri razionali; ad es. 2/3 ha un senso preciso quando lo considero operatore tra grandezze; ma se lo voglio rappresentare in un certo modo scegliendo determinati strumenti espressivi, puo' avvenire che quel concetto non possa mai essere rappresentato con precisione con un numero finito di simboli. Come nel caso in cui scegliamo il secondo modo di rappresentare la successione, dobbiamo necessariamente usare valori approssimati (che non vuol dire sbagliati): ci spingiamo cioe' vicino alla verita' quanto vogliamo, senza arrivarci mai.
La filosofia medievale quando parlava di chiliagono (il poligono di 1000 lati) o di miriagono (quello di 10000 lati) diceva che "praticamente" essi si confondono con la circonferenza. La matematica insegna a dare la differenza tra l'arco di circonferenza e il lato del poligono con l'approssimazione che ci e' necessaria (una volta mi basteranno due cifre, un'altra ne avro' bisogno 20). Se la circonferenza ha un raggio pari al raggio terrestre, la differenza di cui sopra e' di qualche centimetro. In matematica non esistono il piccolo e il grande in assoluto, ma esistono procedure che ci permettono di migliorare le informazioni quanto vogliamo; e noi dobbiamo saper giudicare l'informazione che ci serve e chiederla bene. Torneremo su questo discorso.

<u>Numeri</u> <u>naturali</u>: vengono cosi' detti quelli che ci servono per contare gli elementi degli insiemi finiti. In tutte le lingue ci sono parole che indicano i numeri; storici e psicologi ne studiano la genesi. Noi prendiamo per data l'esperienza che consiste nel far passare gli elementi di un insieme dando un nome a ciascuno (il bambino lo sa gia' fare quando viene a scuola), esperienza immediata ma non cosi' naturale come sembra. Essa traduce un fatto logico importantissimo: che quando noi contiamo non ci interessiamo della natura degli elementi stessi (pecore sassolini o altro): il concetto costruito si adatta all'insieme e a tutti quelli che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con esso; il numero non e' l'insieme, ma un concetto aggregato all'insieme e a tutti quelli che gli corrispondono. Questo primo gradino di astrazione non e' raggiunto da alcuni soggetti cui manca la corrispondenza biunivoca.
Altro elemento che si ritrova in tutte le lingue e' poi che ci sono due serie di parole: quelle che riguardano i numeri cardinali, cioe' quelle che danno il numero degli elementi di un insieme, e quelle che riguardano gli elementi di un insieme in cui ho stabilito un ordinamento. Questi due aspetti sono distinti nettamente anche se collegati; le due serie dimostrano l'origine diversa di esperienze elementari che pur corrono tra di loro parallele. I tentativi di rendere rigorosa l'analisi dei fondamenti sono stati rivolti sia ai numeri cardinali che agli ordinali. Oggi si presenta l'assiomatizzazione di Peano, che ha messo i fondamenti dei numeri ordinali (altri tentativi non riusciti sono difficilmente formulabili con le esigenze della logica formale moderna). Ma gli assiomi di Peano hanno motivazioni troppo profonde per essere insegnati non dico alle elementari, ma anche nella scuola magistrale.
Abitualmente si cerca di precisare il concetto di numero cardinale, cioe' il numero degli elementi di un insieme, operazione effettuata col contare. Noi realizziamo abitualmente senza accorgerci questo concetto di corrispondenza biunivoca (contiamo i cappottini appesi anziche' i bambini, i biglietti venduti anziche' gli spettatori ecc.). Non vorrei che ci fossero equivoci: anche nel contare facciamo passare gli elementi uno dopo l'altro, ma niente dice che l'ordine sia necessariamente quello. Nella condotta concreta con cui costruiamo i concetti ci sono operazioni abituali che pero' non sono essenziali al concetto: l'ordinamento in questo caso e' un accessorio che utilizziamo concretamente ma che non e' essenziale. Nel concetto di numero ordinale c'e' qualcosa di piu'.
La genesi psicologica del numero cardinale accettiamo sia per astrazione da una certa relazione ben determinata che e' la corrispondenza biunivoca e attraverso una operazione ben determinata che e' quella di contare che abbiamo memorizzato da piccoli con le parole dei numerali che ci hanno insegnato. Qui comincia una prima necessita' di distinguere tra il concetto e le sue rappresentazioni. La rappresentazione verbale o grafica e' legata a certe convenzioni o abitudini: es. contare 20 per 20 come c'e' traccia nella lingua francese puo' essere legato ad usare le 20 dita. Ci sono convenzioni necessarie per fissare le idee e comunicarle ma non inerenti necessariamente al concetto collegato. Contare per 10 non e' inerente al concetto di numero (come dice Dante al canto XXVI del Paradiso: "Opera naturale e' ch'uom favella/ ma cosi' o cosi' natura lascia/ poi fare a voi secondo

che v'abbella"); delle convenzioni comunque vanno scelte.
Vorrei distinguere tra leggi e regole: le prime inerenti al concetto, le seconde legate al sistema di rappresentazione scelto. I Romani e i Greci non avevano lo zero, eppure contavano e bene anche se con regole complicate. Le leggi fondamentali delle operazioni sui concetti le prendiamo dalla esperienza comune; sugli insiemi operiamo con l'operazione di riunione di due insiemi disgiunti, e allora otteniamo sui concetti che rappresentano questi insiemi una operazione che e' la somma. Cio' che piu' interessa, e che e' il fondamento di tutta la matematica, e' che l'operazione sui concetti riproduce esattamente il risultato dell'operazione concreta sugli insiemi, che segue modalita' del tutto diverse. Se cosi' non fosse, se non avessimo fiducia nell'assoluta coerenza della natura con le nostre rappresentazioni, non servirebbe studiare l'aritmetica ne' la logica. Enriques parla di postulato di coerenza. Accettiamo dall'esperienza comune che questa operazione di riunione sugli insiemi abbia certe proprieta' che chiamiamo in matematica formali; le fondamentali sono la commutativa e l'associativa. Per il ragazzino sono cose che si vedono; basta accertarci che ha percepito la proprieta' e che essa e' diventata operativa: non occorre insistere sul vocabolario. Le formule richiedono l'uso di parentesi, cosa facile solo per chi e' abituato a certe convenzioni. Le parentesi non sono necessarie, si potrebbero escogitare notazioni senza parentesi; l'uso delle parentesi dipende dal nostro modo tradizionale di leggere le informazioni.
Per i numeri che rappresentano gli insiemi finiti le proprieta' corrispondenti sono: proprieta' commutativa $a+b=b+a$
proprieta' associativa $a+(b+c)=(a+b)+c$
N.B.: quando si scrive cosi', in matematica si intende che l'uguaglianza scritta e' valida per qualunque numero a,b,c, cioe' che sono proprieta' non dei numeri ma delle operazioni eseguite: sono proprieta' formali dell'operazione di somma.
(Una distinzione linguisticamente utile puo' essere quella di chiamare addizione l'operazione e somma il risultato, dato che esistono due vocaboli distinti, cosa che non avviene per l'operazione di unione tra gli insiemi).

Passiamo al II punto, la rappresentazione dei concetti; noi scegliamo quella con le cifre arabe, che sottintende due convenzioni fondamentali: la scelta di una base e quella di una convenzione posizionale, cioe' che la cifra rappresenti un numero che dipende dalla posizione che la cifra ha nel simbolo linguistico che abbiamo scritto. Sono cose per noi naturalissime, ma molto pesanti da insegnare. Per la rappresentazione posizionale scelta esiste il personaggio che e' il numero zero con cui seviziamo ulteriormente i ragazzini; e' un'astrazione ancora maggiore: invece di dire: il sacchetto e' vuoto quindi non ha senso contare, si dice: tu conti lo stesso e dici che il numero degli elementi degli insiemi che non hanno elementi e' zero. E' un'astrazione notevole e un progresso intellettuale grandissimo: ci permette di rappresentare numeri comunque grandi e di eseguire le operazioni in modo comodo e codificato. Ad es. mettere in colonna: la convenzione posizionale di per se' sintetizza una somma (es.: $326+827$: $326=3\times100+2\times10+6$, $827=\ldots..$) e le proprieta' commutativa ed associativa permettono di eseguirla in colonna. Le leggi fondamentali giustificano e fondano le regole per le operazioni dell'aritmetica pratica, comprese quelle dei riporti. Dobbiamo saper graduare e leggere nelle procedure eventualmente sbagliate dove c'e' violazione della legge e dove solo delle regole. Se uno ha dimenticato le regole, c'e' modo di cavarsela, magari con un calcolatorino, magari con un simbolismo personale e con piu' fatica. Ma se uno pensa che fare 3+2 sia una cosa diversa dal fare 2+3, allora la matematica sarebbe presa come una formula di magia, in cui l'ordine delle parole e' decisivo. Naturalmente noi dobbiamo insegnare anche le regole. Le cosiddette prove non sono che applicazioni delle leggi fondamentali. N.B.: occorre capire che se operazione e prova danno risultato diverso, almeno una delle due e' sbagliata; ma se danno risultato uguale, non e' detto che siano entrambe esatte.

-Enrica Abbiamo dato grande spazio ad introdurre i bambini alla notazione posizionale e alla scelta della base. Mi sembra che il discorso delle proprieta' sia un passo ulteriore....
-prof.M. Certo per insegnare le proprieta' devo servirmi delle convenzioni. Noi dobbiamo fare la gerarchia logica dei passi, ma eviterei di chiamare le proprieta' col loro nome; l'importante e' che il bambino ci arrivi attraverso esperienze concrete, che potrebbero anche essere fatte sul calcolatore tascabile. Vorrei anche scindere la fatica materiale del calcolo dall'aspetto concettuale. Insegnare l'uso corretto delle convenzioni e' l'aspetto piu' pesante. Ma anche il calcolo multibase serve solo per ribadire gli aspetti convenzionali fondamentali: quando non si capisce o quando stufa non c'e' di peggio.

-Maestra del Sacro Cuore Io in III allo zero ho dato solo un valore verbale, non l'ho mai fatto considerare come contare il niente. Ho spiegato che poiche' le cifre hanno valore posizionale, quando la cifra corrispondente ad una certa posizione non e' nominata (come nel 203 non e' nominata la cifra delle decine), va scritta ugualmente, quello spazio bisogna occuparlo. Non ho fatto nessuna fatica a spiegare questo.
-prof.M. Questa linea di minor resistenza mi sembra molto valida; puo' dare pero' complicazioni quando si arriva alla moltiplicazione
-Maestra Ho provato a dire: che cosa vuol dire 3×0? Prendi 3 caramelle dal sacchetto vuoto, o prendi 3 caramelle senza mettere le mani nel sacchetto. Capiscono che e' impossibile.
-prof.M. Questi discorsi sono ragionevoli e dimostrano che il concetto di zero e' piu' difficile di quello di un altro naturale diverso da zero; e la simbologia provoca ulteriormente difficolta'. Io non ero nella testa degli Indiani quando hanno inventato lo zero. Il pericolo di equivoco pero' non nasce qui, ma nasce nell'uso corretto della simbologia. Quando io dico 40001, salto di nominare le migliaia, le centinaia, le decine; magari certi ragazzini si divertono a capire la differenza tra 40001, 4001, 401 e 41, ma qui si dimostra la necessita' di farli questi discorsi, che magari non sono cosi' immediatamente visibili come le operazioni concrete sugli insiemi fisici dotati di elementi.
Avendo presenti i ragazzi che stentano a capire la corrispondenza biunivoca, ho presente l'identificazione di eventuali soglie in cui la nostra mente puo' inciampare. Quella dello zero e' un'astrazione potentissima che alcuni ingoiano come acqua altri stentano a mandar giu'. Dovremmo cercare le linee di minor

resistenza per introdurre ai concetti fondamentali.

-Enrica Ad una bambina i genitori avevano insegnato che per moltiplicare per 10 bisogna aggiungere uno zero; allora lei da 16 otteneva 106...

-prof.M........dobbiamo trovare il momento giusto per dare le motivazioni nei limiti delle possibilita' di comprensione... Non dobbiamo nemmeno pretendere che le spiegazioni che soddisfano noi alla nostra eta' siano recepite anche da loro; possiamo accettare un minimo di automatismo, la giusta via tra magia e spiegazione astratta (v. Lettere ad una professoressa).

28/1/91
VI incontro col prof.Manara
(appunti non rivisti dall'autore)

-prof.M. Dall'ultima discussione fatta ad Usmate di due casi di ragazzi con difficlta' mi pare di capire che il punto dolente anche per chi ha un minimo di concettualizzazione sia la simbolizzazione, l'uso delle convenzioni verbali e scritte per rappresentare i numeri. Questo e' il punto che piu' mi interessa nel tentativo di aiutare i ragazzi in difficolta': capire le loro vere difficolta' psicologiche e concettuali, capire dove inciampano.

-Rosita Ho due bambini con particolari difficolta' nella soluzione dei problemi e nall'analisi grammaticale e logica i quali, quando giocano alla bottega coi loro soldi (fotocopiati), sanno risolvere a mente tutti i problemi connessi. Ragionano, ma io non sono in grado di farmi dire da loro come hanno ragionato.

-p.M. Con gli studenti universitari di logica vedo che una difficolta' particolare e' usare il linguaggio tecnico della logica, ad es. nell'identificare soggetto e predicato con l'analisi tecnica della logica. A parte il fatto che quella che oggi imparano e' un'analisi fenomenologica esteriore del linguaggio, non piu' un'analisi logica, ed e' questo che mi preoccupa in quella che si sta diffondendo come linguistica moderna. Gli studenti non sono indotti ad analizzare il vero significato delle cose che dicono.
Sempre ad Usmate abbiamo avuto conferma che la maturazione della mente avviene su un fronte vasto, e' piu' facile che si veda piu' sugli strumenti naturali e quotidiani che su quelli astratti ed artificiali; prima migliora la comprensione anche vissuta del linguaggio quotidiano, quello della matematica in quanto pensiero astratto e simbolizzato e' un estremo che non e' detto che si raggiunga.
Il ragazzo di cui parlavamo ad Usmate non e' stupido ma arrivare al pensiero logico esplicito e magari simbolizzato non e' una strada facile. Nelle prove di entrata il ragazzo restava confuso da tutto il complesso delle regole di simbolizzazione (ad es. si confondeva alla richiesta di dire il numero precedente, forse non si sarebbe confuso se gli avessero chiesto "quale numero viene prima"): forse gli era richiesta una padronanza del lessico che in lui e' meno pronta che in altri. Ripeto che il momento espressivo passa attraverso convenzioni che a noi sono chiare ma non lo sono in assoluto. Noi riconosciamo il 7 giocando a carte perche' c'e' tutta un'abitudine tesaurizzata di corrispondenza tra il simbolo e l'espressione, che per noi non e' piu' frutto del conteggio ma di un'abitudine depositata da cui viene il riconoscimento del numero piuttosto che dal contare: bisogna farla riprendere a questi soggetti.

La volta scorsa abbiamo visto l'operazione di somma, che riproduce sui concetti numerici le proprieta' dell'operazione concreta di riunione sugli insiemi finiti. I bambini di cui parlava Rosita sui loro soldi non sbagliano: il concetto numerico c'e', perche' opera coerentemente sull'insieme concreto; le difficolta' sorgono quando si deve simbolizzare con le convenzioni o peggio quando si deve

tradurre in linguaggio la situazione problematica: "devo fare la sottrazione?". L'attenzione e' risvegliata da quello che offre maggior difficolta', cioe' la manovra dei simboli numerici con le regole che abbiamo dato. Come gli studenti che preparano un esame memorizzando i trucchi di calcolo, ma senza curarsi del filo logico. La manovra del simbolismo appare ad alcuni soggetti, magari per colpa del nostro insegnamento, la massima difficolta' della matematica.
Abbiamo visto le leggi fondamentali dell'unione: la commutativa e l'associativa; se non esistessero queste proprieta' sugli insiemi finiti non potremmo motivare le regole di calcolo, il mettere in colonna ecc. (il bambino che contava i cento e i dieci ma non le centinaia e le decine faceva fatica a fare il passo dal concreto all'astratto).

-Rosita Io per anni contavo le astronavi e i camions..Quando da questa simbologia concreta sono passata alle centinaia e alle migliaia e' stata per loro una cosa da ridere.

-p.M. Un bel momento (lo vedo anche su di me quando mi metto a scrivere quello che ho pensato) uno deve sapere saltar giu' dal camion e saltare sul cavallo della simbolizzazione e fidarsene ; occorre allora l'esercitazione grammaticale sulla manovra del simbolo; qui occorre scegliere il momento giusto per evitare di svuotare l'interesse (v. calcolo multibase). Questa simbolizzazione deve diventare automatica, quasi spontanea, come spontaneamente, ad orecchio, parliamo in modo grammaticalmente esatto, ad es. concordiamo in genere e caso aggettivo e sostantivo non in base ad un'analisi ma ad un'abitudine.

-Enrica Vorrei una precisazione sul calcolare le somme partendo da sinistra anziche' da destra. Mi sono trovata con qualche bambino abile nel calcolo mentale, che faceva i conti giusti a mente partendo da sinistra (migliaia, centinaia ecc.) ma sbagliava poi nello scritto proprio per questo motivo.

-p.M. Direi di ricondurli se e' possibile sul sentiero comune cioe' quello delle convenzioni piu' frequenti. Questo discorso dimostra pero' che si tratta di procedure abituali e non di regole prescritte dalla struttura; il mio consuocero faceva i conti per calcolare la sua pensione in modo perfetto iniziando da sinistra, cioe' dalle cifre che contano di piu', per mirare a non sbagliare l'ordine di grandezza. Anche certe tavole francesi che ho a casa fanno cosi'. In certe province dell'Austria e del Trentino, Trieste, Pola ecc., le moltiplicazioni si facevano iniziando da sinistra. Io pero' seguirei le nostre tradizioni, non perche' le altre non siano giuste, ma per evitare che si trovino spaesati. Cosi' come critico le maestre che non fanno rispettare le convenzioni abituali dell'algebra sulle precedenze (prima moltiplicazioni e divisioni, poi addizioni e sottrazioni): es.:$3+2\times7=35$ anziche' 17, perche' il ragazzino abituato a fare i conti in quel modo prima o poi si trovera' a disagio nel rispettare le convenzioni abituali; piuttosto usiamo le parentesi.

-Enrica Anch'io ho fatto notare a quei bambini che rischiavano di distrarsi e di sbagliare: "guarda che poi magari ti distrai e dimentichi i riporti"...

-p.M. Giustissimo, e' un discorso di opportunita', non di necessita', prova ulteriore che le regole che diamo non sono discendenza logica dei concetti, ma abitudini comode, convenzioni scelte opportunamente, che permettono di verificare, automatizzare ecc. Quando ho fatto quel lavoro all'Ancifap, facevo fare le somme in riga anziche' in colonna, perche' non si fissassero sulla rappresentazione ma verificassero concretamente le proprieta' formali delle operazioni; il problema di attaccarli ad una realta' concreta era essenziale per l'insegnamento della matematica a quei ragazzi.

Passiamo a parlare della <u>sottrazione</u>. Se ci mettiamo dal punto di vista cardinale, lo scorporare un sottoinsieme da un insieme e' un'operazione chiara per la fantasia e la ragione. Un po' meno chiara sarebbe se adottassimo lo schema ordinale, perche' l'operazione di sottrazione qui equivale a tornare indietro di un certo numero di posti. Le difficolta' sorgono nella simbolizzazione. A me da bambino hanno insegnato il "prendere in prestito" ma era una procedura che non mi andava; si basa sulle proprieta' formali delle operazioni, la proprieta' commutativa e associativa: ad es. anziche' fare il gruppo di due decine e quello di tre unita', faccio il gruppo di una decina e quello di tredici unita', cioe' uso la proprieta' associativa ecc. Ma in questa procedura che insegnamo non c'e piu' un solo atto di scorporare un insieme, ma vari atti, una quantita' di operazioni che non sono dettate dall'essenza del concetto, ma dalle modalita' di rappresentazione con le nostre cifre; con le cifre romane la procedura sarebbe diversa. Ma se la procedura non e' assimilata, o e' stata dimenticata, non e' detto che non si abbia il senso dell'operazione: uno potrebbe fare un mucchio di gettoni, togliere materialmente quelli che deve togliere, e contare. E' una simbolizzazione rudimentale, che si presta solo nel caso di numeri piccoli, ma il concetto rimane. Sempre piu' grande si rivela il distacco tra le regole che insegnamo della manovra dei simboli ed il concetto. Dobbiamo capire dove i bambini hanno dificolta': potrebbero essere difficolta' di memorizzazione: quando la maestra ha insegnato a me, io ho memorizzato ma non ho capito; il che ci riconduce alla distinzione tra l'assimilazione delle regole esteriori e la semantica, l'assimilazione del concetto. Gli insegnanti possono confondere l'abilita' di esecuzione delle operazioni con la profondita' di assimilazione dei concetti.
L'abilita' di calcolo non coicide con l'acquisizione di mentalita' matematica, la capacita' di astrazione, il gusto di cercare il significato sotto il simbolo, il gusto di cimentarsi coi problemi.come l'abilita' di parlare non vuol dire profondita' di pensiero.

-Davoli C'e' anche la situazione di ragazzini che non riescono a memorizzare la procedura automatizzata perche' non riescono a capirne in qualche modo il significato.

-p.M. Il momento dell'adozione di regole convenzionali per alcuni e' piu' difficile che per altri. Ricordo quando ero un ragazzino piccolo piccolo che la memorizzazione dei complementi a 10 (il 2 va con l'8, il 3 con il 7 ecc.) e' stato uno sblocco della

difficolta' che aveva per me presentato la sottrazione. Non saprei dire perche' si e' aperta cosi' quella porta che sembrava chiusa. Prima la sottrazione mi era difficile, o dovevo contare alla rovescia, come diceva il prof.Vergnaud.
Si pone poi il problema del problema, che affronteremo in seguito. Per ora limitiamoci alle operazioni sui numeri naturali,; il saper poi schematizzare, simbolizzare, ricondurre il caso concreto ad una certa operazione che uno ha imparato comincia ad essere una cosa molto importante e presenta difficolta' di carattere psicologico, come hanno detto sia il prof.Vergnaud che la prof.Baruk.
Il caso della sottrazione e' un altro caso clamoroso in cui ci incontriamo con l'introduzione dello zero. Con le cifre romane non avremmo avuto bisogno dello zero, con quelle arabe occorre. Con lo zero si ripresenta il distacco del simbolo dal significato: presentare la sottrazione come operazione inversa dell'addizione e' da una parte intuitivamente ovvio, dall'altra puo' essere difficile come terminologia e circonlocuzioni.
Quindi: comunicazione, assimilazione delle regole del simbolismo, estensione del concetto numerico con l'aggiunzione dello zero, sono tre difficolta' (la terza concettuale) che nell'insegnamento possono diventare gravi.
Qui ho meditato sull'<u>impiego</u> <u>delle</u> <u>macchinette</u> <u>tascabili</u> non per evitare di insegnare le regole ma per verifica o conferma. Dobbiamo liberarci dal complesso di inferiorita', dalla dipendenza o dal rifiuto di questo oggetti. Perche' non far vedere che certe informazioni si possono ottenere anche cosi'? Se la matematica, come diceva Peano, e' una forma perfezionata di logica, se e' sotto certi aspetti un linguaggio, che deve servire per avere ulteriori informazioni a partire da certi punti di partenza, allora le informazioni legittimamente possiamo prenderle dove le troviamo. Cosi' come per i pesi specifici non andiamo ogni volta a fare l'esperienza, ma guardiamo sulle tabelle; e' sempre un'operazione matematica. Se diamo ad un ragazzino da trovare il peso di una pallina d'acciaio avente un certo diametro: noi gli diamo il diametro, ma lui deve dividerlo per due e trovare il raggio; cioe' gli diamo un'informazione, ma lui deve gia' manipolarla in base al significato delle parole che capisce e che manovra; dopodiche' deve trovare il volume in mm^3, cercare sulla tabella il peso specifico e moltiplicare volume per peso specifico per trovare il peso in grammi. E' un'operazione perfettamente matematica: date certe informazioni, trovarne altre, utilizzando le informazioni che si trovano sui libri.
Tra l'insegnare alle persone, magari anche evolute, a prendere un dischetto, infilarlo nella macchina, rispondere alle domande e poi leggere le risposte, che e' un modo abbastanza brutale di utilizzare i calcolatori; tra l'insegnare a fare i programmi senza capire che cosa significhino, e capire qual e' l'uso concettuale dell'operazione, anche complicata, di fare un programma anche di calcolatore , mi pare che ci sia una certa differenza; la prima procedura e' un addestramento, la seconda un insegnamento ad analizzare in forma prcisa, rigorosa e completa tutti i passagi logici che ci conducono ad avere delle informazioni , anche se la materialita' dell'elaborazione delle informazioni la fa la macchina. Quindi non vorrei che l'uso di questi piccoli strumenti fosse esorcizzato come quello delle siringhe o delle pistole: "butta via". Dobbiamo usarle razionalmente per avere razionalmente

delle informazioni, senza diventarne schiavi, e saper leggere le informazioni che danno. Mi piacerebbe percio' rimeditare sull'utilizzazione delle macchinette.

-Rosita I miei bambini fanno i "vu cumpra'": stendono i tappeti per terra e vendono cose che non avrebbero nemmeno regalato... Hanno fatto i manifesti: sconti 100% ; "allora me lo devi regalare"; sono scesi al 90%, poi al 50% e al 20% ; hanno capito percentuali, sconti, spesa guadagno ricavo IVA. Hanno anche aperto una banca con il cambio per la valuta estera: sterline, franchi svizzeri, ecc., e con i prestiti a interesse. Il tutto con i soldi fotocopiati.

-p.M. Il concreto stimola la loro curiosita'. Sono giochi in cui rispettano regole concettuali e ragionano; e' aritmetica e logica fatta in pratica. "Ti ho dato tot dunque mi devi dare tot": e' un ragionamento fatto in base al discorso concreto. E' una struttura logica di regole finanziarie che si traducono in regole matematiche. Diventa in pratica vissuta la coerenza concettuale. L'ingegnosita' naturale relativa alle cose concrete e' una manifestazione dell'intelligenza e della logica. Abbiamo cervelli che ragionano coerentemente per arrivare a certi scopi, programmano e verificano. La scuola spesso mortifica questa inventiva, che potrebbe essere creativa, perche' mette alvei ben determinati, magari troppo alti, per ragioni di comunicazione, di convenienza sociale, di uniformita' di comportamento ecc.
Ad Usmate abbiamo appena visto il caso di un ragazzino che aveva preferito costruire una sedia piuttosto che una scatola: evidentemente la sedia, anche se piu' complessa, era inserita in un vissuto a lui vicino, mentre della scatola non sapeva che farsene. Questi ragazzini dimostrano di avere una razionalita' immediata, pratica, che bisognerebbe utilizzare per portarli dal livello artigianale ad un livello cosciente, riflesso, astratto, simbolizzato (fino al livello matematico).
A chi mi dice che i Cinesi hanno inventato i razzi, io rispondo che gli occidentali hanno inventato la termodinamica, cioe' hanno valutato il fenomeno energetico nella sua generalita'. E' la differenza tra il livello artigianale e quello scientifico (quello che Piaget chiamerebbe la formazione di determinate strutture): saper dire il perche' quella cosa e' riuscita e quindi arrivare al livello astratto.

-E.Zago Presentando la sottrazione sia sotto l'aspetto cardinale che sotto quello ordinale alle medie mi trovo in difficolta'con gli interi perche' li' cade il significato concreto: devo scorporare un'immagine e sostituirne una nuova. Altra domanda: quando devo valutare i ragazzi del liceo che hanno capito che cosa devono fare ma continuamno a fare gli stessi errori...

-p.M. Il passaggio dai cardinali ai numeri con segno e' segnalato fin dai tempi di Tartaglia, Pisano Fibonacci ecc., che ne cercarono un'interpretazione. Sui libri si trovano tanti tentativi di immaginare i numeri negativi; forse le immagini geometriche sono le piu' compromettenti perche' legano troppo all'immagine; quando poi si arriva alla moltiplicazione cade tutto. Forse l'immagine con crediti e debiti e' la piu' facile (v. Niccolo' Tartaglia e l'Ars Magna di Cardano, v. anche Clairaut). Raccomando

di non staccare tanto l'immagine nuova da quella vecchia.
Quanto al problema della valutazione, e' molto grosso. Anche i tests che si usano spesso non sono di matematica ma di altro.

-Maestra XY Quando un bambino ha difficolta' a capire un concetto, e' bene passare alla tecnica? capira' un po' alla volta il concetto?

-p.M. Ad Usmate un bambino contava fino a 40 ma aveva il concetto fino al 10 (o almeno cosi' dicevano). Nella mia storia personale e in quelle di altri la concettualizzzione e' andata di pari passo con lo strumento espressivo: imparando la filastrocca dei numeri se ne impara anche il concetto. Sono due fenomeni che corrono per conto loro e poi si raccordano. Ma per alcuni non e' cosi'.

VII incontro col prof.Manara
(appunti non rivisti dall'Autore)

-Enrica Volevo una precisazione sulla differenza: e' difficile far cogliere ai bambini l'uso simbolico della sottrazione nei problemi con la differenza; loro la colgono come addizione di una parte mancante.

-prof.Manara Anche per me da ragazzino la sottrazione offriva una certa difficolta'. Vergnaud e la Baruk hanno messo in evidenza due aspetti di carattere reale di manipolazione di problemi in cui si presenta un'unica operazione che e' la sottrazione; uno, quello che abbiamo messo in evidenza la volta scorsa, e' quello di scorporo; l'altro invece che Vergnaud acutamente distingueva e' dire "quanto manca a", quanto devo dare o prendere per arrivare a; e si simbolizza sempre con un'unica operazione.
Per me si e' aperto un'orizzonte quando ho scoperto il complemento a 10: le operazioni che prima erano fastidiose sono diventate piu' semplici. Bisognerebbe trovare le strategie didattiche per ricondurre l'una situazione all'altra o avere la pazienza di aspettare che il ragazzino ci arrivi.

-Enrica Quando andavo a scuola mi hanno insegnato ad eseguire la sottrazione, ad es. 572-229, non facendo 12-9 ma piuttosto :"dal 9 al 12 quanto manca? ecc." Mi chiedo se un meccanismo cosi' puo' giovare ai bambini piu' in difficolta'.

-p.M. Io vedo una difficolta', la stessa su cui Vergnaud aveva molto insistito: lo scorporo di un sottoinsieme da un insieme mi sembra piu' immediato dal punto di vista dell'esperienza concreta, ma nell'esecuzione dell'operazione del trovare la differenza forse e' piu' immediato cercare quanto manca a. Se questo e' vero, bisognerebbe ricollegare il contare "quanto manca a" all'altra operazione, quella di scorporo. Se da 9 devo togliere 5, la cosa piu' facile mi sembra togliere 5 elementi e contare quanti ne restano; l'altro modo invece e' dire: ne hai 5, quanto manca per arrivare al 9? allora conta :6, 7, 8, 9, ne mancano 4.
Sto cercando la via piu' sicura per la manipolazione dei simboli in modo che non si perda il contatto con il significato; togliere un sottoinsieme da un insieme e' un concetto facile, ma allora l'operazione corrispondente va imparata a memoria? 9-5 fa 4 ecc.... Se invece accettiamo che il bambino conti quanti ne mancano, allora pero' e' il discorso complementare a quello di togliere il sottoinsieme. Quando nella mia testa si e' formata la "tabella dei complementi" ho imparato a fare la sottrazione. Si tratta di collegare saldamente i due concetti tra loro: il concetto di togliere il sottoinsieme, e quello di contare quanto manca a. A me non sembra un dramma che il bambino conti sulle dita: preferisco che capisca l'operazione piuttosto che memorizzi automaticamente la procedura. Purche' capisca che contare dal 6 al 9 da' lo stesso risultato che togliere 5 caramelle dall'insieme di 9. Dal punto di vista del problema il bambino si trova di fronte a domande diverse: la difficolta' per lui e' capire che si trova di fronte allo stesso problema

presentato verbalmente in modi diversi. Potrebbe anche succedere che capisca un modo di fare la sottrazione e memorizzi l'altro: anche questo non sarebbe allarmante (io li ho ingoiati tutti e due capendoli dopo). Sono significativi in questo senso gli esempi capitati ad Usmate 2 settimane fa: la ragazzina che contava fino a 15 ma capiva il senso solo fino a ...
A me sembra piu' dura ancora l'acrobazia che si fa nell'introduzione dello zero. Il processo di simbolizzazione ha esigenze di opportunita' e di comodita' che non corrispondono alle esigenze concettuali: i Romani e i Greci contavano bene senza lo zero, ma provatevi a fare una una moltiplicazione di due numeri con 4 cifre romane...
Vergnaud e' legato all'aspetto psicologico: osserva le difficolta' che i ragazzini hanno davanti all'enunciato di certi problemi, non gli interessano tanto i concetti, quanto come funziona la macchina mente davanti a certi stimoli. A Trieste con l'amico Bensi avevamo pensato dei <u>tests di decifrazione di problemi logicamente isomorfi ma formalmente diversi</u>; volevamo identificare dove sta la difficolta' tipica della decifrazione dell'enunciato verbale, per trovare una strategia risolutiva. Aveva fatto modellini con materiale trasparente per cui il ragazzino doveva fare delle misure per differenza: ad es. doveva misurare segmenti inaccessibili su un cubetto trasparente, doveva manovrare gli strumenti in modo che un problema di struttura simile ad un altro risultava pero' dal punto di vista del comportamento avere strategia risolutiva differente.

Siamo ora arrivati ad un momento cruciale, l'introduzione dell'operazione di <u>moltiplicazione</u>, che e' uno degli scogli su cui mi trovo spesso in opposizione alle maestre. Vorrei presentare le cose come le vedo io, qual'e' la struttura mentale che vogliamo mettere in quelle testoline; le strategie le vedremo poi.
Quali sono le idee teoriche? Abbiamo una operazione di composizione interna, cioe' dati due numeri ne otteniamo un terzo, che ha certe proprieta' formali che sono

commutativa: $a \times b = b \times a$

associativa: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

Queste proprieta' valgono per tutti i numeri, sono quindi proprieta' non di a e di b ma dell'operazione presa in se'. Poi ci sono le proprieta' dello zero e dell'uno, queste sono proprieta' di numeri particolari:

$$0 \times a = 0$$
$$1 \times a = a$$

Ci sono ancora le proprieta' del collegamento tra questa operazione e la precedente $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
Qui va detto esplicitamente che le parentesi le usiamo nel senso della matematica, cio' che sta tra parentesi deve essere preso come un tutto unico. Inoltre c'e' una convenzione di lettura, se in una espressione ci sono operazioni di addizione e di moltiplicazione si conviene di fare prima la moltiplicazione. In logica questo si presenta come convenzione dei domini di una operazione: il dominio del segno piu' si estende avanti e indietro scavalcando i segni di moltiplicazione....
La proprieta' distributiva del prodottto rispetto alla somma si puo' leggere da destra a sinistra anziche' da sinistra a destra: se ho un fattore comune che appartiene a tutti gli addendi di una somma, questa la posso scrivere come un unico fattore che

moltiplica la somma; es.: $2\times3+2\times5$ lo posso scrivere $2\times(3+5)$. Cio' viene chiamato "raccoglimento di fattore comune", ma non e' altro che la proprieta' distributiva letta da destra a sinistra.
La struttura citata e' il bersaglio ultimo cui miriamo. Poi ci sono le regole, che si basano sulle leggi dette, con la simbolizzzione arabo-indiana. Le regole non sono altro che la traduzione pratica delle leggi fondamentali dell'operazione. In piu', mi ricordo i pianti in braccio alla mia mamma quando ero un ragazzino forse di 5 o 6 anni, ci sono le tabelline. Nei paesi sedicenti civili obblighiamo i nostri figli a memorizzare 100 moltiplicazioni (ne basterebbero 60).
Il discorso dolente riguarda la <u>presentazione del concetto di moltiplicazione</u>. Abitualmente essa viene presentata come addizione ripetuta. Che cosa vuol dire 5×3? una somma di 3 addendi tutti uguali a 5. Non ho trovato modi diversi nei libri che ho consultato. Tuttavia c'e' un pericolo: che in questo modo vengano dissimmetrizzati i due fattori, uno prende l'aspetto di addendo e l'altro di numero di volte. Questa asimmetria mi sembra molto foriera di guai per il futuro della maturazione mentale del nostro cliente, perche' quando si dovra' applicare la moltiplicazione al calcolo concreto di numeri che sono misure di grandezze o conteggi di elementi o pesi o cose del genere, allora nascono gravi pericoli di fraintendimento.
Ricordo quello che diceva una volta il prof.Polvani in una conferenza sul concetto, su cui ritorneremo se loro vogliono, di <u>dimensione fisica</u> (dimensione non come ingombro ma come significato dei numeri che danno le misure); ci racconto' che una volta aveva incontrato un fattore toscano che diceva che la matematica era un gran mistero, "perche' moltiplicando le lire per le sacca si ottengono sempre lire e mai sacca". Oppure quando vado a fare rifornimento di benzina, moltiplico le lire per i litri: perche' mi vengono sempre lire e mai litri? Questa difficolta', che ho trattato tanti anni fa su un articolo della rivista "Didattica delle scienze", e' un equivoco originato nella testa dei ragazzini (e dei maestri) dalla presentazione ancestrale della moltiplicazione come somma ripetuta. Nell'esempio dei sacchi di patate a 10000 lire l'uno: lei mi da' un sacco, ecco 10000 lire; un II sacco, 10000+10000 fa 20000 lire; col III, siamo a 30000. A nessuno viene in mente: ti do' 1000 lire, tu mi dai 5 patate; altre 1000, siamo a 10 patate; ecc... Sono problemi concettuali.
Anche nella presentazione della proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma la presentazione del prodotto come somma ripetuta , per la dissimmetria con cui sono trattati i due fattori, presta il fianco a far imboccare all'insegnante e soprattutto al discente una strada non giusta.
Allora il discorso che mi permetto di presentare (che forse e' piu' facile oggi che tanti anni fa perche' i ragazzini hanno il concetto di insieme e quello di prodotto cartesiano), che e' il piu' efficace per illustare la proprieta' associativa, distributiva e commutativa, e' quello dell'<u>insieme prodotto cartesiano</u>: cioe' l'insieme che ha come elementi tutte le coppie possibili formate con un elemento di un insieme e un elemento dell'altro. Questo e' il modo in cui e' presentata l'operazione di prodotto nella vecchia analisi algebrica di Capelli; lo stesso discorso faceva il prof.Ascoli da analisi matematica.
Il concetto di prodotto di due numeri viene illustrato col concetto di prodotto cartesiano perche' gli elementi del prodotto

cartesiano sono tanti quante le unita' del prodotto di due numeri. Qui forse ho sbagliato anch'io, perche' la nostra lingua ci permette di <u>distinguere tra l'operazione e il risultato di essa</u>: potremmo prendere l'abitudine di chiamare moltiplicazione l'operazione e prodotto il risultato. Nel caso degli insiemi, chiamiamo intersezione tanto l'operazione logica che ci conduce a considerare l'insieme costituito dagli elementi che appartengono all'uno e all'altro, quanto il risultato, che chiamiamo insieme intersezione dei due. Non vorrei fare verbalismi inutili, ma almeno concettualmente dobbiamo distinguere: il 6 si ottiene moltiplicando 3×2.
Allora il caso del prodotto cartesiano mi pare si possa illustrare benissimo con la carta quadrettata: se mettiamo gli elementi di uno dei fattori sulle righe, quelli dell'altro sulle colonne, e' chiaro che se contiamo i quadretti otteniamo un numero uguale a quello di tutte le coppie possibili che hanno un elemento dell'uno e un elemento dell'altro. Non solo, ma la proprieta' commutativa mi pare si possa visualizzare semplicementa girando il rettangolo, e la proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma si puo' illustrare dividendo il rettangolo in due con una retta orizzontale o verticale; l'associativa richiederebbe il prodotto cartesiano di tre insiemi, quindi di andare nello spazio e formare un parallelepipedo; se ci sono i cubetti, si possono usare e viene fuori un mattone. Qui le maestre piu' di me hanno la sensibilita' immediata della ricettivita' di un'immagine da parte dei ragazzi.

-D. Non mi e' chiaro come questa presentazione risolverebbe il problema delle sacca e delle lire.

-p.M. Questo problema lo prenderemo in considerazione dopo: e' il <u>problema delle marche, delle grandezze e del significato concreto della moltiplicazione</u>: dovremo dedicare un incontro a questo problema, che e' molto importante perche' la sua incomprensione da' luogo a volte o a quel problema delle sacca e delle lire o a quelle distinzioni tra divisioni di contenenza e divisioni di ripartizione o ad altre cose che sui sussidiari sono gonfiate senza grande necessita'. L'illustrazione descritta ci serve per il momento a salvare la proprieta' commutativa, e questo perche' la proprieta' commutativa e' il fondamento o la motivazione della dimensione dei numeri e delle grandezze.
Una volta a Modena mia figlia Angela piangeva perche' in un problema doveva fare una moltiplicazione con numeri grandissimi; allora per aiutarla ho pensato di fargliela io, ma ho cambiato l'ordine dei fattori. Dopo un po' di tempo mi sono ricordato di quel problema e le ho chiesto com'era andata a finire. Mi risponde a muso duro: "Il maestro ha detto: risultato giusto ma procedimento sbagliato". "Come: procedimento sbagliato?" Insomma, uno dei fattori doveva dare il numero delle volte e l'altro le lire e non si poteva cambiare l'ordine dei fattori. Mia moglie era stata informata dalla bambina, ma non me l'aveva detto per paura che mi arrabbiassi. Successivamente in Universita' il mio amico prof. Forni, che era stato maestro per mantenersi agli studi, mi mostro' i testi con tanto di approvazione ministeriale in cui si teorizzava questa questione. E' stato allora che ho scritto l'articolo di cui vi parlavo poco fa.
Ho presentato sommessamente questa illustrazione perche' mi sembra che salvi nel modo piu' perspicuo la proprieta' commutativa che e'

una delle leggi fondamentali; in seguito ci aiutera' a vedere chiaro nel discorso di sacca per lire che fa sempre lire. Se concepiamo bene il significato dei numeri e delle operazioni che faccciamo sui numeri, allora riusciamo anche a fare le acrobazie senza paura di sbagliare (dal maestro dell'Angela non sono andato, purtroppo era un maestro che voleva che i suoi alunni fossero sempre piu' avanti degli altri, cosi' mi e' toccato anche insegnare all'Angela l'algoritmo della divisione con due cifre, perche' i suoi compagni l'avevano gia' fatto e lei no, naturalmente solo come addestramennto e non come significato: a tanto mi ha costretto quel maestro...)
Ho l'impressione che se si presenta la moltiplicazione come somma ripetuta, la proprieta' commutativa, cardine dell'operazione, viene sovraimposta o solo verificata praticamente.
C'e' poi il grosso problema dell'eseguire le operazioni utilizzando le convenzioni di rappresentazione del nostro sistema abituale. Ci sono qui allora le solite prescrizioni: dalla memorizzazione della tavola pitagorica (cioe' la moltiplicazione dei numeri con una sola cifra), a tutto il gioco dei riporti; poi il gioco dello scalare verso sinistra staccando con un segnetto e cosi' via, tutte operazioni che noi insegnamo e facciamo memorizzare , che sono non necessarie ma estremamente comode e utili, e costituiscono l'applicazione di queste proprieta' fondamentali al calcolo concreto con le nostre convenzioni. Potremmo utilizzarne altre, ad es. nel libro di Cassina: "Calcolo dei prodotti" si insegna la "moltiplicazione fulminea"; oppure si potrebbe fare la lettura di tavole: le tavole dei quadrati potrebbero servire a fare le moltiplicazioni riducendole ad addizioni e sottrazioni, tutte cose ormai superate dall'esistenza di macchinette che si trovano nei fustini dei detersivi.
Ma tanto per dare un'idea di quella che si chiama <u>moltiplicazione fulminea</u> dei numeri di due cifre, provo a moltiplicare 23 per 47: anzitutto moltiplico tra loro le cifre delle unita', $3\times7=21$, tengo da parte il 2 e scrivo 1, poi $2\times7=14$ e $4\times3=12$, $14+12=26$, col 2 di prima fa 28, scrivo 8 e tengo da parte ancora il 2, $2\times4=8$, $8+2=10$, viene 1081. Ho applicato la proprieta' distributiva e associativa; infatti $23=2\times10+3$, $47=4\times10+7$, ; tengo da parte le decine e comincio a moltiplicare tra di loro le unita'; considero poi le decine: prima l'associativa, poi la distributiva del prodotto rispetto alla somma, poi ancora l'associativa. E' come quando vedo l'acrobata sulla fune, a me interessano le leggi della meccanica razionale che lo tengono su. Sono sempre le leggi fondamentali che vengono applicate: scelta che sia la base della numerazione, scelta che sia la convenzione posizionale, ci permettono di fare le operazioni.
(Qui dove ho messo la stanghettina avrei dovuto mettere uno zero, ho dovuto capire da solo che era uno zero: perche' non me l'hanno mai detto? quella e' una cosa veramente importante, che sia una stanghetta o altro non conta, conta che anziche' un 4 e' un 40).
Quindi sono le leggi fondamentali dell'operazione che, trasferite nelle regole con le convenzioni, mi danno le regole di calcolo del risultato. Oggi che abbiamo le macchinette non vale neanche tanto la pena di fare questi discorsi : ma li ho fatti perche' negli errori vale la pena di distinguere l'origine e il significato: se l'errore e' concettuale o se e' puramente meccanico di applicazione delle regole. Non perche' i regolamenti si possano violare: ma si potrebbero cambiare. Potrei moltiplicare

la prima cifra di destra con la prima di sinistra, e sarebbe la moltiplicazione graduale come voleva Peano.
Quando si ha a che fare con numeri che sono misure, cioe' che danno informazioni concrete su operazioni concrete della realta', allora il significato delle cifre che vengono fuori in relazione alle manipolazioni concrete della realta' e' da valutare con una visione un po' critica. Si apre poi il discorso del calcolo coi numeri con la virgola, i cosiddetti numeri decimali; io non vorrei parlare di numeri decimali , qualcuno potrebbe legittimamente pensare che siano una nuova specie di numeri, mentre sono solo una particolare rappresentazione dei numeri razionali. Purtroppo anche sui programmi sono chiamati cosi'.

-Enrica Mi va benissimo il discorso di non insegnare la moltiplicazione come somma ripetuta. Infatti anch'io non l'ho introdota cosi'. Non ho mai avuto la difficolta' delle lire e delle sacca. Ma che cosa bisogna allora sottolineare? Se comprano tre sacchetti di arance a 6000 lire l'uno, i bambini fanno spontaneamente 6000, 12000, 18000.

-p.M. La prossima volta vedremo di parlare delle dimensioni delle grandezze. sono problemi che si presentano non solo in aritmetica, ma anche in fisica, in geometria, in economia. Occorre distinguere bene le informazioni e i concetti concreti trasmessi attraverso i numeri, cioe' qual e' il significato della misura delle grandezze che noi eseguiamo, perche' effettivamente la risoluzione del paradosso di lire e sacca e' che non si tratta di sacca per lire, ma di sacca per lire al sacco: le 6000 lire non sono una quantita' di denaro ma un prezzo, cioe' una quantita' di denaro riferita ad una quantita' di materia. B.Finzi ha scritto un bellissimo articolo per il Periodico di matematiche intitolato "I misfatti del numero uno". Aveva ragione perche' spesso nella moltiplicazione ci si riferisce all'unita', l'unita' si perde, quindi si perde il significato del numero che viene fuori.
Gli economisti spesso confondono flusso di merce, quantita' di merce, quantita' di denaro, prezzo. Un esempio di discorso sbagliato degli economisti e' parlare di media di prezzi: e' un concetto che non sta in piedi; il prezzo del grano, dell'oro, della corrente elettrica sono riferiti ciascuno ad una unita' di misura diversa, non se ne puo' fare la media. Forse ha senso parlare di volume di affari, cioe' di vere quantita' di denaro.

25/2/91

VIII incontro col prof. Manara
(appunti non rivisti dall' Autore)

Av e vamo deciso di parlare di unita' di misura, marche, annotazioni, dimensioni ecc. E' un discorso che da' luogo ad una quantita' di equivoci anche nelle elementari quando si fanno ad es. i pesi specifici, le densita' e altro. Io presentero' l'aspetto teorico, quello cioe' che deve guidare noi e farci evitare le eventuali abitudini incomplete o fuorvianti, mentre ai discorsi di carattere didattico penseremo in seguito.
Avrei dovuto parlare prima del concetto di misura; ma diamo per scontato il concetto di grandezza e quello di misura, cioe' di rapppresentazione di una certa grandezza mediante opportune convenzioni e col linguaggio della matematica. Convenzioni, e linguaggio: il grande vantaggio della matematica come linguaggio e' il poter rappresentare con precisione le cose; nel caso delle grandezze l'operazione che ci conduce a rappresentare (dare una cifra: "la matematica non e ' altro che cifrare e decifrare") le grandezze mediante numeri e' l'operazione di misura. Il numero naturale, abbiamo detto, ci rappresenta gli insiemi finiti e le operazioni sugli insiemi finiti; un passo avanti , e siamo nell'ambito delle grandezze. Nei programmi c'e' il sistema metrico decimale ecc., tutte queste convenzioni che l'uomo ha usato fin dall'epoca classica per rappresentare le cose (v. tutta la problematica ad es. di Archimede nella sua opera "Misura del cerchio"). Non basta pero' rappresentare la realta' mediante numeri, bisogna che i simboli scelti ci permettano di dedurre, di trarre delle conclusioni, di questo parleremo.
In teoria ogni grandezza che prendiamo in considerazione (lunghezze, superfici, volumi, durate) potrebbe avere la sua unita' di misura diversa dalle altre. Per il tempo, l'impiego dei numeri ha due aspetti diversi: uno e' quello di numero come coordinata temporale, cioe' numero che indica uno stato, un istante; l'altro come misura. Se dico: la lezione comincia alle 13, questa e' una coordinata temporale; se dico: la lezione e' durata un'ora, questa e' una misura di durata. Una data e' una coordinata temporale, uno stato fisico, non una durata.
Ripeto: <u>ogni grandezza potrebbe avere la sua unita' di misura diversa da ogni altra</u>. Per le aree ad es. c'e' la pertica, la tornatura, il versuro (che e' la quantita' di sup. che l'uomo puo' "vertere" in una giornata, v. "Il Mulino del Po").
La pratica, sia in geometria e fisica che nel commercio, ha portato a <u>convenzioni</u> per la scelta dell'unita' di misura che fanno perno su trattati internazionali e su teoremi.
Il problema della scelta delle unita' di misura si e' posto verso la fine del '700, in particolare la Rivoluzione francese ha proposto la scelta delle unita' di misura delle lunghezze (non sono riusciti per quanto riguarda il tempo a dividere il mese in 10 giorni come volevano). Gli astronomi e i matematici francesi hanno lavorato per piu' di 40 anni, ancora sotto il re, a misurare l'arco di meridiano, e alla fine hanno scelto come u. di m. la quarantamilionesima parte del cammino piu' lungo che uno puo' fare sulla terra andando dritto dietro al suo naso (sulla superficie sferica c'e' un'u. di m. naturale che e' il cerchio massimo).

Altri paesi hanno altre u. di m., il miglio marino (che non e' il miglio terrestre degli Inglesi) e' la distanza piu' elementare misurabile astronomicamente: se uno guarda col sestante la stella polare, quando la misura angolare e' cambiata di un minuto la nave ha percorso un miglio). Ci sono stati poi per piu' di un secolo vari litigi per altre misure della fisica, ad es. per la resistenza, per la capacita' elettrica. Esistono tuttavia delle convenzioni internazionali ormai universalmente adottate e ogni nazione le ha fatte leggi proprie. L'Italia ha adottato queste convenzioni ma i legislatori non le hanno inserite nella sua legislazione; ora col Mercato Comune occorre anche abbreviare con certe convenzioni piuttosto che con altre: i cartelli stradali sui quali la parola "metro" e' abbreviata con "mt" anziche' con "m" sono adesso anche fuori legge.

In base ai teoremi di geometria e alle leggi della fisica sono state poi scelte le altre unita' di misura. Quindi ci sono convenzioni di partenza, teoremi o leggi fisiche, e scelte conseguenti. Ad es. come unita' di misura della superficie potrei usare la superficie del biglietto da 1000 lire, o della moneta da 500; ma se scelgo bene, il calcolo delle misure di superficie risulta piu' comodo in base ai teoremi di geometria.

I teoremi di g. che invoco in questo caso sono i seguenti:

-in due rettangoli che hanno uguale base le superfici stanno tra loro come le altezze;

-in due rettangoli che hanno uguale altezza le superfici stanno tra loro come le basi;

-in due circonferenze le superfici stanno tra loro nello stesso rapporto dei quadrati del raggio;

-in due quadrati le superfici stanno tra loro come i quadrati dei lati.

Questi teoremi riguardano non le misure ma i rapporti tra le grandezze. Se noi scegliamo come unita' di misura delle superfici la superficie del quadrato che ha come lato l'unita' di misura delle lunghezze, allora la misura della superficie del rettangolo si ottiene semplicemente moltiplicando tra loro le misure dei lati. Questo e' l'enunciato preciso di quell'enunciato scombinato che si sente dire: l'area del rettangolo e' il prodotto della base per l'altezza. Invece: l'area del rettangolo misurata in cm^2 si ottiene moltiplicando tra di loro le misure in cm dei lati; questo e' un altro discorso. Quindi questa operazione molto semplice che e' data dal prodotto di due numeri che significano misure e' consentita solo dalla scelta -estremamente ragionevole ma non imposta- dell'unita' di superficie. I toremi citati ci permettono, una volta fatta quella scelta dell'unita' di misura di cui abbiamo detto, di calcolare in modo estremamente comodo con una operazione aritmetica la misura della superficie.

Ecco quindi che abbiamo nei libri la classificazione in <u>grandezze fondamentali</u> e <u>gr.</u> <u>derivate</u>: le fondamentali sono durata, intensita' di corrente o resistenza, lunghezza; le derivate sono unita' opportunamente costruite con certe convenzioni partendo dalle unita' fondamentali, e scelte in modo tale che le misure in quelle unita' derivate si ottengano con calcoli molto semplici a partire dalle misure delle grandezze fondamentali.

Questi discorsi si applicano anche ai rapporti economici e conducono ad es. alla <u>distinzione fondamentale tra somma di denaro e prezzo</u>.

Qui si torna al discorso fatto la volta scorsa. Supposto che il

valore sia misurato secondo una unita' di misura che e' in ogni nazione una moneta (quello che gli economisti, ad es. Pareto, chiamano il numerario) allora la quantita' di denaro che si da' in cambio dell'unita' di misura della merce e' il prezzo: e' la quantita' di denaro riferita all'unita' di misura. Vedremo poi le convenzioni di scrittura, in modo che almeno noi manovriamo con sicurezza i simboli. Quanto al problema didattico, mi basterebbe evitare gli errori o almeno i personaggi inutili, come le famose divisioni di contenenza e di ripartizione, che confondono le idee, perche' il ragazzino, posto davanti a parole per lui strane, anche se coniate per aiutarlo, si spaventa e crede che corrispondano a concetti diversi, che non capisce; altro es., la proprieta' asssociativa e dissociativa, una sola proprieta' da' luogo a due parolacce: chiamo verbalismo l'insistere sulle parole come se fossero l'essenza delle cose. V. anche la distinzione linguistica tra paio e coppia, applicata allo studio dell'aritmetica riguardo al numero due: la cosa diventa oscurante anziche' chiarificante. O anche la distinzione tra confine e perimetro: fissarsi sulle parole, sopratutto su quelle che sono o che sembrano difficili, porta una paura in chi deve utilizzare i concetti.
Ripeto: noi abbiamo una certa operazione generale, l'operazione di misura, che ci permette di rappresentare con opportune convenzioni ogni grandeza mediante un certo numero; abbiamo delle scelte di opportunita', convenzioni internazionali per la scelta di unita' di misura delle grandezze piu' abitualmente usate della fisica e dell'economia; convenzioni le quali si articolano a loro volta sulla scelta di certe unita' fondamentali e di altre unita' cosi' dette secondarie o derivate; la scelta di queste unita' secondarie e' frutto di una doppia convenzione basata su teoremi di geometria e su leggi della fisica, e queste convenzioni permettono allora di ottenere la misura di certe grandezze con operazioni relativamente facili e operazioni aritmetiche codificate. Es.: c'e' il teorema di geometria che riguarda l'area del rettangolo, se io voglio misurare in cm^2 l'area del rettangolo basta che io misuri in cm i lati e moltiplichi tra loro queste due misure.
Abbiamo cosi' distinto tra quello che e' necessario, quello che e' opportuno, e quello che e' comodo: e' necessario rispettare le leggi della fisica, e' opportuno farlo con dei calcoli piu' semplici possibile, e' comodo adoperare le convenzioni utilizzate da tutti, cosi' ci facciamo intendere piu' facilmente.
Archimede calcolava l'area del cerchio senza utilizzare i cm^2, perche' era Archimede: ma lui trovava i teoremi. Anche in Euclide, in Apollonio ci sono unita' di misura diverse dalle nostre: ma i teoremi sono giusti. Noi abbiamo queste convenzioni che sono opportune e comode; possiamo anche non rispettarle, ma andiamo in un ginepraio perche' facciamo calcoli piu' complicati, e non riusciamo a comunicare con gli altri. Quindi, opportunita' e comodita', ma anche chiarezza di comunicazione.
Fatte queste osservazioni, vediamo come si possa in qualche modo utilizzare le convenzioni stabilite e adottare per legge in modo da essere chiari nei calcoli e non fare confusione.
Le convenzioni internazionali, che hanno stabilito finalmente le notazioni delle unita' fondamentali e derivate, hanno stabilito anche una quantita' di convenzioni di scrittura di quelli che sono i simboli indicatori delle u. di m. adottate a livello internazionale.
Il metro viene indicato con la lettera m minuscola senza punto,

perche' m non e' l'abbreviazione della parola metro, ma il simbolo dell'u. di m.; cosi' se ho una corrente di 20 Amperes, si scrive 20 A, senza il punto, perche' quell'"A" non e' l'abbreviazione della parola "Ampere", e' l'u. di m.; una forza e' di tot Newton, si scrive tot N, perche' N non e' un'abbreviazione ma il simbolo dell'u. di m. Newton. Poi si e' stabilito che le u. di m. soprattutto dell'elettricita', che hanno i nomi dei grandi fisici, sono indicate con la lettera maiuscola, A per Ampere, V per Volt, W per Watt ecc, i gradi Kelvin con K maiuscolo, le altre sono scritte con le lettere minuscole, e poi con le famose abbreviazioni k, c e m per indicare il chilo, il centesimo e il millesimo; quindi, l e' il litro, ml e' il millilitro.
Ci sono poi le unita' derivate che hanno un comportamento moltiplicativo rispetto a certe u. di m. e di divisione rispetto ad altre. Se io scelgo ad es. l'u. di m. della velocita', posso scegliere metri al secondo, oppure chilometri all'ora; scrivo (ripeto ancora una volta: questo discorso e' per noi, al problema didattico penseremo poi): m/sec (metri diviso secondi); oppure: $m \times sec^{-1}$ l'esponente negativo significa che deve essere messo al denominatore. Come fai a riconoscere che va diviso anziche' moltiplicato? Perche' se io cambio l'unita' di misura delle lunghezze, allora l'u. di m. della velocita' resta moltiplicata; se io cambio l'u. di m. delle durate, allora l'u. di m. resta divisa, e' inversamente proporzionale. Poiche' la velocita' e' definita in questo modo, direttamente proporzionale alla lunghezza del percorso e inversamente proporzionale alla durata dello stesso percorso, la notazione dell'unita' di m. deve essere fatta cosi'. Tant'e' vero che la velocita', calcolata in metri al secondo, e' data semplicemente dividendo la misura della lunghezza del percorso, misura effettuata in metri, per la misura della durata effettuata in secondi.
Allora, se ho un rettangolo i cui lati misurano 3m e 2m, la misura dell'area e' data da: $3m \times 2m = 6m^2$. Questi due simboli m per m li tratto come se fossero due letttere di un'espressione algebrica, il loro prodotto e'm^2. L'utilizzazione di questi simboli e' molto semplice se si rispettano le regole dell'algebra, anche se compaiono dei denominatori.
Torniamo al discorso "quantita' di denaro - prezzo". Es. classico: compro 3 metri di stoffa a 2000 lire al metro (dovrebbe essere al metro quadrato, ma si sottintende che l'altra dimensione sia costante; in Francia arpent e' misura di superficie, mentre in Canada e' misura di lunghezza, perche' i primi colonizzatori francesi del Canada. per l'impraticabilita' delle foreste, percorrevano i fiumi con le barche disboscando una fascia di larghezza costante). Se l'altezza e' costante, il prezzo e' direttamente proporzionale all'unita' di misura della moneta e inversamente all'unita' di misura della lunghezza: va dunque indicato con lire/metro; lire al metro per metri da' lire. Analogamente per le divisioni di ripartizione: se devo dividere una damigiana da 50 litri in 25 fiaschi, quanti litri stanno in ogni fiasco? 50 litri diviso 25 fiaschi fa 2 litri al fiasco.
Nella testa di chi diceva: "risultato giusto ma procedimento sbagliato" ci sarebbe che 2000 sono lire, 3 e' un numero puro; allora si deve fare 2000 per 3 volte, non si puo' fare 3 per 2000 volte. Ma la confusione iniziale e' tra quantita' di denaro e prezzo.Due prezzi non si possono sommare, ma ad es. le quantita' di denaro relative ai movimenti di capitale di un tipo di mercato

si': allora sono sempre lire o sterline.
Queste convenzioni sono limpidissime: se annotiamo bene le marche (quelle che in fisica si chiamano le dimensioni) delle grandezze che entrano nelle nostre considerazioni, noi riusciamo a fare i calcoli non legati da procedure necessitanti e ad ottenere risultati scritti bene.
Queste idee non dovrebbero offrire difficolta' nelle operazioni ne' di moltiplicazione ne' di divisione purche' abbiamo chiara l'idea delle grandezze coinvolte; inoltre le convenzioni di scrittura sono facili da rispettare, sono le convenzioni dell'algebra sulle moltiplicazioni e divisioni dei monomi letterali, con le rispettive potenze.
Nella Scuola Elementare si ha a che fare con prezzi, probabilmente con durate e con velocita', con volumi, con pesi per unita' di volume (ovvero pesi specifici), non ricordo altro riguardo alla manovra del legger, scrivere e far di conto.
Allora secondo me si tratta di salvare anzitutto il significato della cifrazione della realta' con numeri, che e' ovviamente indipendente dall'unita' di misura (qui vanno bene tutte le strategie didattiche per ribadire la convenzionalita' della scelta e l'opportunita' di andare d'accordo): l'essenziale e' che mediante la misura io abbia informazioni sugli oggetti. Ricordo l'aneddoto dell'amico di Bensi che aveva dimenticato la formula dell'area e percio' per acquistare la moquette misurava il pavimento con un giornale ampio 1 metro quadrato. Ma se avesse dovuto pavimentare la piazza dell'Unita' di Trieste, come avrebbe fatto con il giornale? Il possesso del teorema di geometria che dice che la misura in metri quadrati si ottiene moltiplicando tra di loro le misure in metri dei lati; allora le operazioni che fai sono molto semplici, e con esse puoi dedurre ulteriormente, avere una conoscenza che dovresti conquistare con molta piu' fatica; non solo, ma se conoscessi la geometria proiettiva ti basterebbe una cartolina della Piazza dell'Unita' di Trieste, e con una misura lineare ricostruiresti l'area. Piu' conosci la teoria e meno fatica fai per avere ulteriori informazioni sulla realta' che devi dominare.
L'opportunita' dell'adesione alle convenzioni e alla scelta delle rappresentazioni si congiunge con la potenza degli strumenti conoscitivi che utilizziamo per avere un'immagine della realta'.
Se io volessi misurare la capacita' di una bottiglia, la cosa piu' semplice sarebbe pesarla vuota e poi piena d'acqua, data la scelta dell'unita' di misura del peso, che abbiamo scelto come il peso dell'unita' di misura del volume dell'acqua; allora la misura in grammi del peso in piu' della bottiglia piena mi da' la misura in centimetri cubi della capacita' della bottiglia. Se pero' devo misurare la portata di una nave, allora non posso fare la stessa operazione di pesarla piena e vuota, e' impoprtante allora conoscere un po' di geometria descrittiva e di analisi matematica e con operazioni meno faticose e piu' sicure ottengo il volume della nave. Oppure per un serbatoio di gas o di benzina, con due aste perpendicolari tra di loro riesco a valutarne la portata. Piu' conosco la struttura logica e la teoria di un certo linguaggio (intesa la matematica come linguaggio, cioe' come insieme di strumenti di rappresentazione concettuali), piu' ho la capacita' di esprimere, ma anche di dedurre.
Per misurare l'altezza di un campanile posso andare su con un filo cui e' attaccato un sasso, mollare il sasso un po' alla volta, e

misurare quanti metri di filo sono andati via. Ma conoscendo la teoria della similitudine mi basta stare giu' e traguardare opportunamente.
Eratostene ha misurato il raggio della terra supposta sferica con le seguenti osservazioni: sapeva che a mezzogiorno del solstizio d'estate (21 giugno) un bastone ad Assuan (perpendicolare al terreno) non da' ombra, quindi il sole e' esattamente sulla verticale; lui era in un paese dell'Egitto e conosceva il cammino necessario per andare ad Assuan. Ha misurato l'ombra del bastone in quel posto, e, considerata la similitudine dei due triangoli (v. figura), ha misurato il raggio terrestre.
Archimede conta il numero dei granelli di sabbia che riempiono la sfera che ha per raggio la distanza terrra-sole; Pascal pesa l'aria che sta sulla terra (era in polemica con il rettore dei Gesuiti di Parigi che diceva che l'aria non pesa) col seguente ragionamento: una pompa aspirante in un tubo al di la' di 10 m d'acqua non tira piu'; quindi la pressione dell'aria e' equivalente pressapoco al peso di una colonna di 10 m d'acqua. Immaginando che la terra sia coperta da 10 m d'acqua, e conoscendo la superficie terrestre, il calcolo e' fatto. Le soluzioni dei geni sono cosi' semplici ed elementari che uno pensa che avrebbe dovuto arrivarci anche lui.
Faccio questi discorsi perche' insisto a dire che la conoscenza delle struttura teorica del linguaggio che utilizziamo ci permette di moltiplicare le nostre conoscenze, di approfondirle di ottenerle con meno fatica. Da che mondo e' mondo si sono utilizzate le unita' di misura: il miglio romano e' circa 1400 m, un migliaio di passi, dato che il passo medio dell'uomo e' di 70 cm, il doppio 140; quando le legioni marciavano, uno contava. Cosi' per i nodi: il mozzo contava i nodi che gli sfilavano tra le mani. Discorsi interessanti perche' mettono in evidenza quali sono i momenti fondamentali e quali i convenzionali. I fondamentali, rappresentare la natura mediante questo linguaggio (il l. della matematica), i convenzionali dipendono dalla comodita' per la persona e per la comunicazione; il diffondersi della comunicazione ha posto la necessita' di avere un solo modo di rappresentare i numeri (e questo e' stato fatto da piu' secoli), e un solo modo di rappresentare le grandezze: e questo viene ottenuto con fatica: ancora oggi nel mondo anglosassone ci sono misure in once, o in piedi,ad es. in areonautica (pare che la disgrazia delle Azzorre sia stata dovuta all'equivoco di un'informazione data in piedi e interpretata in metri); o prezzi enunciati in dollari al barile, o in dollari all'oncia; abitudini forse mantenute per una certa consorteria di privilegiati, o per l'inerzia e difficolta' al cambiamento. Tuttavia essendo giudizi di opportunita' e' chiaro che qualcuno puo' non andare d'accordo.
Il grande Peano aveva stabilito un modo ingegnosissimo di rappresentare le figure geometriche con un certo linguaggio , che pero'non e'stato adottato da nessuno (se un linguaggio non e' adottato da nessuno in sostanza non e' un linguaggio). Il calendario gregoriano e' stato adottato dall'Europa perche' le stagioni andavano via, ma gli ortodossi per fare dispetto al Papa non l'hanno utilizzato.

-Rosita Lei ha approvato che nel I ciclo si debba giocare coi bambini usando unita' di misura non convenzionali...

-p.M. Io non ho approvato e non ho disapprovato: e' come il discorso del multibase: facciamolo pure per far capire che la scelta della base e' arbitraria e che la convenzione posizionale e' una convenzione; ma se fa confondere le idee ai ragazzi che fanno gia' fatica a lavorare con la base 10, allora no. Cosi' questi discorsi sono accettabili solo nella misura in cui servono a ribadire i concetti.

-Enrica Se scrivo lire/metro, i bambini intendono che la barra voglia dire diviso; io ho detto loro che si puo' dire "su".

-p.M. Ma effettivamente significa diviso! Deve essere trattata come un'operazione di divisione dell'algebra, tant'e' vero che se moltiplico per metro, m va via. Stante le convenzioni stabilite per misurare i prezzi, il prezzo si ottiene dividendo la spesa totale per il numero di metri. Se ho globalmente speso 9000 lire e comperato 3m, il prezzo e' 9/3. La barra non e' un simbolo cervellotico, e' un simbolo algebrico scelto per ricordare l'operazione concreta che io faccio.

11/3/91

IX incontro col prof.Manara
(appunti non rivisti dall'Autore)

Il discorso delle grandezze e' molto importante; riguardo ad esso si leggono strane cose sui sussidiari, si insegnano cose inutili e inutilmente complicate.
E' il secondo impatto dei bambini con la matematica, cioe' con un linguaggio per descrivere in un determinato modo la realta' che ci circonda ai fini di conoscerla e di agire su di essa in modo razionale.
Il primo impatto, abbiamo visto, e' quello con il concetto di insieme finito, che viene rappresentato con il numero intero naturale, che ci fornisce il linguaggio per dominare questi contenuti. Come abbiamo detto, la riunione di due insiemi viene rappresentata con l'addizione dei numeri, la possibilita' di mettere due insiemi in corrispondenza biunivoca viene rappresentata con l'uguaglianza dei numeri, lo scorporo di un insieme da un altro e altre operazioni possono essere codificate con la sottrazione, ecc. In sostanza l'aritmetica dei numeri naturali ci da' il sistema di concetti e gli strumenti linguistici per conoscere le operazioni sugli insiemi finiti, e quindi il linguaggio relativo a questo segmento della realta'.
Abbiamo visto una gerarchia di leggi fondamentali e regole. Non vogliamo affrontare per il momento il problema della scelta delle strategie didattiche.
Riassumendo, il primo impatto con la matematica e' dato dagli insiemi finiti codificati dall'aritmetica, intesa come teoria dei numeri interi naturali; l'operazione e' quella di contare, le relazioni fondamentali le abbiamo viste, cercando di sottolineare l'aspetto conoscitivo di operazioni sui concetti.
Il secondo impatto, quando il bambino e' un po' maturato, e' dato da un altro insieme di cognizioni che risultano ormai necessarie alla vita civile, insieme che fa riferimento al concetto di grandezza e all'insieme degli strumenti linguistici che l'uomo ha inventato per dominare questo concetto.
A mio parere il concetto di grandezza costituisce un gradino piu' alto di quelli finora considerati, perche' si potrebbe dire, come vedremo tra poco, che ci sono aspetti di esso che presentano difficolta' ulteriori per i ragazzini. Uno di tali aspetti e' il fatto che mentre negli insiemi finiti gli elementi sono di fatto tutti diversi uno dall'altro (le caramelle in un sachetto, le carte di un mazzo, ecc.) nelle grandezze, soprattutto continue come viene supposto solitamente, dobbiamo operare con parti che sono solo potenzialmente nella grandezza, non sono distinte. Ad es. se devo misurare questo tavolo, devo vederlo in metri; ma i metri non sono segnati, occorre uno sforzo in piu' di astrazione, sforzo che e' reso necessario dalla necessita' di rappresentare, di codificare, come si usa dire.
Cioe' noi abbiamo un insieme di oggetti della vita reale, che sono le grandezze, che codifichiamo mediante i numeri con operazioni un pochino piu' complicate di quelle che ci servono nel caso degli insiemi finiti e che ci rendono necessario costruire tutta una serie di nuovi simboli, di nuove operazioni concettuali, che offrono a volte difficolta', e che comunque vengono spesso presentati con un contorno non necessario al concetto, e che anzi

spesso vela cio' che e' l'essenziale del concetto: e' il "rendere difficile il facile attraverso l'inutile" (v. il cerchio goniometrico e le coordinate cartesiane nella trigonometria: Tolomeo osservava benissimo le stelle e ha fatto calcoli complicatissimi che ci stupiscono per la loro precisione senza usare il cerchio ne' le funzioni trigonometriche).
Questo II capitolo si presta a presentare senza chiaroscuro, a confondere i concetti fondamentali con le regole di rappresentazione, gli espedienti di calcolo con le cose fondamentali, per cui l'argomento delle frazioni (mi sforzero', seguendo Peano, di non usare questo termine) costituisce un mistero per molti, quando non dovrebbe esserlo.
Questa rappresentazione della realta' ci serve non solo nella vita quotidiana ma anche nella scienza, che e' tutta fatta di misure, cioe' di rappresentazioni della realta' codificate mediante certi strumenti linguistici che sono quelli della matematica, mediante certe operazioni che vedremo, fondate su certe ipotesi che considereremo sulla costituzione della realta': molta della nostra trattazione matematica e' fondata su ipotesi magari inconsce sulla natura delle cose che manipoliamo, che presto o tardi devono essere rese esplicite, diversamente si casca in sorprese clamorose. Ad es. all'inizio del secolo e' stata fatta la scoperta di Planck dei quanti d'energia; si pensava che l'energia fosse continua, e la scoperta di Planck ci ha costretti a considerarla come qualcosa di granulare, di discontinuo. Fino ad allora la fisica da Newton in poi si era comportata nei riguardi dell'energia come se fosse una grandezza continua, ipotesi accettata da tutti ma non necessaria, che quindi ha dovuto essere resa esplicita e addirittura essere abbandonata perche' si potessero fare i conti bene. Analogamente nella cosmologia attuale, leggendo bene i lavori, si trova l'ipotesi tacita, non esplicita, della euclidicita' dello spazio geometrico; penso che ad un certo momento i cosmologi dovranno buttarla via perche' provochera' tali difficolta' che risultera' evidente che e' un'ipotesi, non infondata ne' cervellotica, ma che comunque e' un'ipotesi della nostra intuizione, fondata su certe elaborazioni della nostra intuizione, ma tuttavia non necessaria.
Quali sono le proprieta' fondamentali di queste che chiamiamo le grandezze, e che riscontriamo quotidianamente, aree, lunghezze, volumi, pesi, velocita', accelerazioni ecc.?
Anzitutto c'e' presso una certa trattatistica la preoccupazione di definire che cosa si intenda per grandezza. Si fa risalire ad Eulero la def. che suona cosi': grandezza e' tutto cio' che puo' crescere o diminuire. Dunque anche il mal di testa!
Noi non enunceremo frasi di questo genere, che la critica moderna rifiuta. La def. che noi daremo sara' piuttosto una precisazione attraverso l'uso dei concetti, quella che oggi si chiama def. d'uso o def. implicita o def. per assiomi. Se andiamo a leggere infatti la fondamentale memoria storica con cui Peano fonda il concetto di numero naturale non ci troviamo le frase: "il numero e'....": ma Peano comincia a parlare del numero, dello zero; la def. viene data implicitamente (questo e' l'avverbio tecnico) attraverso le proprieta' che vengono enunciate.
Sarebbe quindi meglio non pretendere la ripetizione di frasi che vorrebbero essere definitorie e invece sono solo flatus vocis.
Faremo esempi, preciseremo quali sono le caratteristiche che noi attribuiamo a questo concetto di grandezza; analogamente non

definiremo le singole grandezze, non diremo che cosa si intende per peso, volume, ecc. Parleremo di grandezze, in particolare di lunghezze, aree, volumi, pesi, capacita', durate, potenziali elettrici, velocita'; anche l'energia che paghiamo all'AEM e' una grandezza, tant'e' vero che ce la misurano. Il problema di associare un numero ad un ente di questo tipo e' un problema fondamentale nella matematica pura ed applicata, per la scienza e per la tecnica.
L'operazione che consiste nel tradurre con numeri non tutte ma alcune delle proprieta' di questi concetti e' una operazione che dobbiamo insegnare e dobbiamo prendere in considerazione.
Per tutte queste grandezze che usiamo nella vita quotidiana e nella scienza esiste una procedura, diversa da grandezza a grandezza, per stabilire una certa relazione tra gli oggetti. Cosi' diciamo: due oggetti hanno lo stesso peso, perche' abbiamo uno strumento che si chiama bilancia , e, messi i due oggetti sui due piatti, esso rimane in equilibrio. Noi diciamo che due segmenti hanno una lunghezza uguale (o addirittura diciamo la stessa lunghezza) perche' abbiamo una certa tecnica : o i segmenti sono realizzati con un corpo rigido e si possono portare uno sull'altro, oppure abbiamo una cordicella o uno strumento qualunque che ci permette di dire: hanno uguale lunghezza.
Alcuni autori identificano segmento e lunghezza di esso; io vorrei distinguere, lunghezza e' cio' che hanno in comune tutti i segmenti che posso portare uno sopra all'altro. Quindi lunghezza e' un concetto astratto da una classe infinita di oggetti che hanno la relazione di essere sovrapponibili, relazione verificabile con operazioni concrete. In modo analogo, non vorrei parlare di misurare un segmento, ma la lunghezza di esso; perche' il numero che noi associamo con l'operazione di misura non e' di quel segmento ma di tutti i segmenti che appartengono alla classe di equivalenza. Il vocabolario pero' e' oscillante.
Io vorrei distinguere tra il singolo oggetto, la qualita' comune che riscontriamo a certi oggetti, attraverso certe operazioni ben codificate: mettere sulla bilancia, trasportare uno sull'altro, mettere il voltmetro in due punti e vedere se la lancetta va a finire nello stesso punto, far scattare il contasecondi ad un certo istante e fermarlo ad un altro per misurare una durata, ecc. Preferirei dire che si misura non il tempo ma una durata di tempo; anche qui il vocabolario e' un po' oscillante; non pretendo di dire che chi non parla come me sbaglia, ma vorrei almeno attirare l'attenzione su questi aspetti della faccenda.
Per quanto riguarda le aree e i volumi il discorso e' un po' piu' complicato: vale pero' la pena di farlo perche' si riattacca alla geometria, cioe' ad un modo razionale di conoscere le cose.
Quando io ero piccolo sui testi si faceva distinzione tra grandezze di prima e grandezze di seconda specie; erano chiamate di I specie le grandezze tali che la relazione di uguaglianza e' rilevabile con una sola operazione semplice: ad es. le lunghezze di segmenti, le uguaglianze di pesi; di II specie quelle per le quali l'operazione non e' semplice ed immediata; si vede pero' che questa distinzione non e' molto importante, perche' il concetto di semplicita' e' di tipo soggettivo.
L'area e' considerata di II specie perche' due figure piane possono avere la stessa area ma non essere sovrapponibili: se prendo un quadrato e il triangolo rettangolo di base doppia, hanno la stessa area, ma per verificare cio' devo prendere un pezzo,

tagliarlo e spostarlo, quindi la verifica della sovrapponibilita' e' fatta con opportune elaborazioni.
Per i volumi la cosa e' ancora piu' complicata: nel caso dei poliedri, si danno dei poliedri (solidi con le facce piane) che hanno ugual volume ma non sono decomponibili in modo che con le parti di uno si ricomponga l'altro. Ad es. se ho un cubo e un tetraedro regolare con lo stesso volume, non potro' mai decomporre il tetraedro in un numero finito di parti con cui si possa ricomporre il cubo, mentre nel piano per i poligoni la cosa e' sempre possibile.
I classici distinguono anche le grandezze di III specie, quando le operazioni non possono essere fatte in numero finito, oppure si richiede un confronto del tipo di quello di classi di infiniti poligoni. Questa distinzione pur essendo abbastanza interessante non e' fondamentale, nel senso che esistono procedure finite o infinite (ma che si dominano) in base alle quali possiamo in ogni caso decidere se due enti hanno una certa relazione che chiamiamo uguaglianza delle grandezze ad essi corrispondenti. Le tecniche possono essere anche diverse, non cosi' precisate. Se voglio calcolare il volume di una bottiglia, la cosa piu' semplice e' pesarla vuota e piena d'acqua, ed allora il volume e' dato da un certo numero in base a certe convenzioni. Queste tecniche comunque esistono, si tratti di grandezze di elettrotecnica, di meccanica, velocita', accelerazioni o altro.
Noi dunque non definiamo peso, volume, area. Diciamo che sappiamo che cosa vuol dire avere uguali pesi, o uguali lunghezze, ecc. I ragazzini secondo me non chiedono che cos'e' il peso, che cos'e' la lunghezza. Sono domande che ci poniamo noi e alle quali rispondiamo con frasi che ci sembra abbiano un senso, ma in realta' non ne hanno. Allora, anziche' insegnare frasi vuote, operiamo.
-I passo: per le grandezze si puo' stabilire una relazione che chiamiamo di uguaglianza, di volta in volta verificabile con tecniche diverse, che ci conduce a costruire un concetto astratto relativo alla classe di equivalenza degli oggetti tra i quali stabiliamo quella relazione. Se abbiamo l'operazione riguardante i segmenti, abbiamo la relazione che consiste nel portarli uno sull'altro e constatare che hanno gli stessi estremi, e diciamo che hanno la stessa lunghezza. Costruiamo allora il concetto astratto che e' la lunghezza del segmento, lunghezza che e' comune a quel segmento e a tutti quelli ad esso sovrapponibili;
abbiamo un poligono, e costruiamo il concetto di area, che e' il concetto astratto posseduto da quel poligono e da tutti quelli che, opportunamente divisi in pezzettini poligonali, possono essere composti in maniera da ricoprire il poligono, naturalmente senza sovrapposizione. Riguardo alla velocita', diciamo che due automobili hanno la stessa velocita' se hanno percorso lo stesso tratto di strada nello stesso istante di tempo (bisognerebbe in realta' parlare di velocita' media).
Diventa un concetto astratto perche' e' caratteristico di una certa classe di equivalenza, che e' la classe di equivalenza di quelle grandezze che noi verifichiamo tra loro uguali in questo ordine di idee con una tecnica ben precisa. La filosofia medievale parlava di oggetto formale, cioe' quell'aspetto astratto sotto il quale noi guardiamo gli oggetti che possono essere materialmente distinti o magari diversi tra loro ma che appartengono alla stessa classe di equivalenza rispetto ad un certo punto di vista. Ad es.

il biglietto da 1000 e' uguale a due monete da 500 non per la geometria o per la composizione chimica ma come potere d'acquisto; abbiamo una classe di equivalenza di operazioni che e' quella delle operazioni commerciali per cui dare un biglietto da 1000 o due da 500 e' la stessa cosa.
Costruiamo dunque delle classi di equivalenza stabilendo un certo tipo di uguaglianza da un certo punto di vista rispetto ad un certo concetto relativo a certe operazioni. Questo e' il primo passo per la costruzione del concetto di grandezza.
-II passo: la possibilita' di eseguire una certa operazione che abitualmente chiamiamo somma e che viene eseguito in modo diverso relativamente ad ogni classe di grandezze.
Se si tratta di sommare due segmenti, li metto sulle stessa retta in modo che il II estremo del primo coincida col I estremo del II (o viceversa). Se si tratta di fare la somma di aree costruiamo una strana figura accostandone due con un lato in comune; se si tratta di sommare due intervalli di tempo, cominciamo a misurare la durata del II quando scade il I; se si tratta di misurare la differenza di potenziale, mettiamo i conduttori in serie, come ci hanno insegnato sui libri di fisica, ecc. Si vede che e' possibile definire in ogni caso (proprieta' costitutiva del concetto di grandezza) un'operazione che e' l'operazione di somma. Quest'operazione di somma e' fondamentale perche' si possa parlare dell'operazione di misura.
A volte nel linguaggio comune si usa il termine misura in un modo che non e' proprio; ad es. misurare la temperatura e' un'operazione che a rigore non ha senso, in questo ordine di idee, perche' la temperatura non e' una grandezza, non posso sommare due temperature, sarebbe come sommare due date: che cosa ottengo? Oppure: "la corte ha erogato due secoli di prigione": hanno sommato le condanne dei singoli, sono le operazioni che fanno i giornalisti. "Prendere la temperatura", questo va gia' meglio, significa stabilire un certo numero che determina un certo stato fisico. Qui bisognerebbe fare un po' di termodinamica.
Il II aspetto e' quindi la possibilita' di costruire una III grandezza a partire da altre due, costruzione che viene fatta con un'operazione che viene chiamata somma. A quest'operazione noi riconosciamo dall'esperienza certe proprieta' che sono quelle della somma tra numeri, ed e' cio' che giustifica il fatto che la chiamiamo somma.
Al solito la scienza e' fatta di confusioni, o se vogliamo di generalizzazioni. Un pignolo potrebbe dire: tu devi parlare di somma solo per quanto riguarda i numeri naturali, per il resto ti proibisco di parlare di somma, diversamente fai una gran confusione. Ma allora si potrebbe rispondere; dato che l'operazione ha le stesse proprieta' formali dell'operazione tra i numeri naturali, mi permetto di chiamarla somma anche tra grandezze. Che c'e' di male?
Tra due numeri naturali vale che a+b=b+a, accettiamo dall'evidenza che anche quella che chiamiamo somma tra grandezze (beninteso della stessa specie) abbia la proprieta' commutativa.
Analogo discorso per la proprieta' associativa: noi presumiamo che la somma tra grandezze abbia le stesse proprieta' formali della somma tra numeri naturali; questo e' verificato nell'esperienza comune; se andiamo nell'ambito scientifico, ad es. quello della relativita' ristretta, non possiamo operare con l'operazione di somma cosi' come l'abbiamo fatto ora, perche' per

la composizione di velocita' non valgono tutte le proprieta': se io vado avanti a fare l'operazione di somma ad un certo punto nell'ambito della relativita' ristretta c'e' una velocoita' limite. Si parla pero' ancora di somma di velocita' anche se le formule di composizione sono un po' diverse dalle altre.
Ho detto questo ancora una volta non per intimorire ma per rinsaldare la convinzione del fatto che noi accettiamo una certa schematizzazione della realta' che non e' detto che ci dica tutto, ma che ci serve abbastanza bene per conoscere.
Le due circostanze: possibilita' di constatare l'uguaglianza, possibilita' di costruire un'operazione da chiamarsi somma, sono comuni anche agli insiemi finiti. Qual e' il passo ulteriore che ci fa parlare di grandezze? E' dato dalla cosiddetta divisibilita', proprieta' fondamentale che invece non possiede il concetto di numero naturale, perche' ad es. dividere il tre in due parti uguali, lo sa anche un bambino, non si puo' fare. Le discusioni filosofiche sul pari e sul dispari datano da Pitagora.
Invece per una qualunque grandezza le nostra intuizione ci presenta qùesta proprieta' che e' la possibilita' di dividerla almeno in due parti; se sono due parti, diventa un numero qualunque di parti, perche' le nuove parti poi le suddivido.
Ecco secondo me il punto concettualmente difficile: le parti non sono date di fatto, sono solo potenzialmente nella realta', mentre gli elementi che costituiscono un insieme finito sono di fatto distinti e contabili.
Accanto a queste tre proprieta': possibilita' di istituire una relazione di uguaglianza, possibilita' di stabilire un'operazione di somma, divisibilita', c'e' poi un'altra proprieta' importantissima che e' la proprieta' di confronto, cioe' di ordinamento totale. Se la relazione di uguaglianza non sussiste, cioe' le due grandezze non appartengono alla stessa classe di equivalenza, ha senso stabilire una relazione di maggiore di o di minore di. Posso dire qual e' il segmento piu' lungo tra due, o quale area e' maggiore di un'altra se si tratta di poligoni; posso dire qual'e' la capacita' maggiore di quell'altra, la velocita' maggiore, la durata maggiore. Questo stabilisce una relazione di ordinamento che ha le tre proprieta' classiche che tutti conoscono:
-proprieta' transitiva: se $a<b$ e $b<c$ allora $a<c$;
-proprieta' antisimmetrica: se $a<b$ e $b<a$ allora $a=b$;
e soprattutto due elementi sono sempre confrontabili (ordinamento totale), cioe' date due grandezze noi possiamo sempre con un numero finito di operazioni concrete stabilire se sono uguali o qual e' la maggiore delle due. Questa proprieta' viene chiamata proprieta' archimedea: non e' veramente l'assioma di Archimede ma ne e' una conseguenza.
Ecco allora disegnato il quadro di questi enti che utilizziamo tutti i giorni, che rappresentiamo: la cosa piu' importante e' che il linguaggio matematico ci permette di conoscere e dominare questi enti, fondandosi sulla esistenza della possibilita' di avere una relazione di uguaglianza, di ordinamento, di eseguire un'operazione di somma.
La proprieta' transitiva della relazione di disuguaglianza secondo Piaget e' una delle strutture fondamentali che il ragazzo acquisisce (i ragazzini di cui ci occupiamo qui hanno gia' superato questo stadio): dice Piaget nei suoi scritti che il progresso fondamentale del ragazzo e' quando dal saper confrontare

due grandezze passa a stabilire una seriazione, cioe' a dire: se la I e' minore della II e la II minore della III, allora la I e' minore della III, non c'e' piu' bisogno di fare confronti.
L'acquisizione di questa struttura astratta di transitivita' di relazioni e' un progresso notevole, e' passare da una struttura di confronto immediato eseguibile con operazioni materiali ad una struttura teorica che come tale domina tutto un insieme di cose.
Una volta ho fatto fare una tesi di laurea: volevo far mettere giu' un insieme di casi in cui il possesso della proprieta' formale della transitivita' permetteva di risparmiare operazioni o guadagnare informazioni, ad es. se si trattava di fare delle pesate di n oggetti per stabilire un ordinamento.

(appunti) Tutto cio' e' il fondamento della rappresentazione con numeri, cioe' della cifrazione, rappresentazione con linguaggio convenzionale e codificato che ci permette di dedurre: non basta di per se' usare il linguaggio matematico, la matematica inizia quando la rappresentazione diventa utilizzabile per la deduzione.
Le proprieta' esposte, commutativa e associativa, le abbiamo prese dall'esperienza quotidiana, anche se si potrebbero prendere per via assiomatica; l'importante e' capire dove si fondano i nostri passi e dove si puo' scivolare.
L'operazione che ci conduce dalla grandezza (ente materiale o fatto fisico) al numero e' l'operazione di misura, che e' fatta in base a operazioni concettuali in parte convenzionali e in parte fondate sulle proprieta'; convenzione e' la scelta dell'unita' di misura; abbiamo visto anche criteri di convenienza...
La costruzione dei sottomultipli e' molto delicata concettualmente, anche se a noi pare evidente. Per dimostrare rigorosamante l'esistenza del sottomultiplo bisognerebbe enunciare la proprieta' di continuita'.
L'operazione di codificazione mediante multipli e sottomultipli ci conduce al concetto di numero razionale. Se davanti ad una grandezza A metto un numero intero 3, ottenendo 3A, posso vedere questa scrittura in modo nuovo, come simbolo di un'operazione concreta (che riesco a fare con operazioni materiali) che e' la costruzione del multiplo. Il 3 non e' piu' l'astratto di una classe di equivalenza di insiemi finiti, e' un operatore ("macchinetta" che produce il multiplo) che opera sulle grandezze. Allora con un ulteriore passo molto semplice posso considerare 1/3 A : "un terzo di A", che da A mi da' il pezzettino; quando ero bambino la mia maestra diceva: 2 diviso 3 non si puo' fare, allora chiamiamolo 2/3; discorso senza senso! Invece, quel simbolo che non ha senso nell'ambito dei numeri naturali acquista senso come risultato di un'operazione su una grandezza.
Cio' che ha senso tuttavia non e' la singola frazione, ma l'operatore da essa indicato; altra difficolta' del concetto di frazione infatti e' che l'operatore puo' essere espresso in infiniti modi ma da' sempre lo stesso risultato: e' un insieme di simboli che hanno esistenza non singolarmente presi ma come classe di equivalenza. Prendiamo allora l'abitudine di muoverci liberamente nella classe, scegliendo varie rappresentazioni (v. prof. che segnava in blu, cioe' come errore grave, le frazioni non ridotte ai minimi termini).

25/3/91
X incontro col prof. Manara

(appunti non rivisti dall'Autore)

Domanda Le marche vanno scritte? davanti o dietro?

prof.M. Direi che bisognerebbe salvare il piu' possibile le convenzioni internazionali, quindi scrivere le marche dopo, ad es. 700 L/kg. La sola eccezione e' per la marca di moneta, che per convenzione internazionale va scritta prima (questo perche' tutti si sono adattati all'uso inglese) .Prima o dopo, l'importante e' pero' che siano scritte giuste. Quanto alle operazioni sulle marche, e' chiaro che insegnare la notazione algebrica ai ragazzini diventa pesante; allora una soluzione abbastanza ragionevole e' mettere tra parentesi i calcoli numerici e scrivere le marche dopo; un'altra e' quella che consiglia il prof. Canetta, es.: "tutti i numeri scritti qui sono metri quadrati"; ma non sempre e' possibile. Una soluzione molto equilibrata si trova sull'Enciclopedia delle Matematiche Elementari in un articolo di L. Brusotti, un capolavoro di equilibrio e di misura , che cerca di conciliare le varie situazioni. Dal punto di vista algebrico, potremmo trattare le marche come le lettere di un monomio: prima si mette il coefficiente numerico, poi la marca intesa come una variabile dell'algebra, come 3a, 4b. Se dobbiamo moltiplicarle tra di loro, operiamo con le regole dell'algebra.

La volta scorsa abbiamo cominciato a parlare delle grandezze e dei numeri razionali ; adesso dovrei completare il discorso e vorrei ribadire 2 o 3 concetti.

I <u>Non diamo la definizione di grandezza</u>, che i ragazzini ripetono per far piacere alla maestra.

A questo proposito ad Usmate si parlava di due ragazzini; uno doveva completare una scheda didattica, c'era un albero tra due case, e doveva dire quale casa era a destra dell'albero; l'altro ragazzo diceva: non puoi rispondere, e' una domanda mal fatta, l'albero non ha davanti e dietro, e' cosi' (e si girava), quindi non ha destra e sinistra, devi dire alla tua maestra che e' sbagliato. Il ragazzino minore diceva: devo farlo, seno' la maestra si arrabbia. Questo e' un es. del fatto che tante volte i ragazzini fanno cose di cui non sono convinti, per far piacere alla maestra.

Noi sappiamo dire non che cos'e' il peso, ma quando due oggetti hanno pesi uguali o addirittura lo stesso peso.

II Alleghiamo ad ogni classe di grandezze omogenee un concetto astratto (peso, lunghezza di segmenti, area di figure piane, volume, differenza di potenziale ecc.) e incominciamo ad avere una <u>tecnica precisa per definire l'uguaglianza</u>. Costruiamo classi di equivalenza attraverso operazioni concrete di volta in volta eseguite con manipolazioni precise sulle grandezze che consideriamo.

Abbbiamo anche parlato di grandezze di I, II, e III specie; questa e' pero' una riflessione che possiamo fare noi, ma ma che non conviene portare ai ragazzini, perche' e' un po' complicata.

Cercherei inoltre di evitare la confusione tra pratica e teoria; frasi come: "la circonferenza e' praticamente un poligono con tanti lati", oppure "la sfera praticamente si puo' costruire con tanti fusi", non sono vere. Cosi' come non esistono cose piccole e grandi in assoluto, non posso dire che l'apotema di un triangolo equilatero e' 0,836 e basta, oppure che π e' 3,14. L'importante e' che in matematica ho metodi che mi permettono di fermarmi dove voglio. Potrebbe andarmi bene π=3, come e' scritto sulla Bibbia; o potrebbero non bastare 10 cifre, come quando devo andare sulla luna.

III C'e' un'<u>operazione di somma</u> che contraddistingue in modo preciso il concetto di grandezza, somma che eseguiamo di volta in volta con tecniche diverse; se si tratta di segmenti, li mettiamo uno dopo l'altro sulla stessa retta, ma si potrebbero inventare altri modi per fare la somma; se si tratta di aree poligonali, si potrebbero mettere i poligoni uno accostato all'altro in modo che abbiano un tratto di perimetro in comune; con la aree a contorno curvo bisogna fare un discorso piu' complicato; per i volumi si possono mettere a contatto due solidi in modo che abbiano una parte di superficie in comune, con adeguate precauzioni; se si tratta di differenze di potenziale si mettono in serie i conduttori, se si tratta di quantita' di corrente si mettono in parallelo (pensiamo due rubinetti che vanno insieme per quest'ultimo caso, due cascate una sopra l'altra per il precedente).

IV C'e' poi la proprieta' di <u>indefinita divisibilita'</u>; qui comincia a delinearsi la difficolta' che ci sara' coi numeri razionali, ripetiamolo, per capire dove si nascondono i ciottoli in cui inciampano i nostri clienti: mentre coi numeri naturali abbiamo una struttura che ci permette di dominare il concetto di insieme finito, i cui elementi sono di fatto distinti l'uno dall'altro, in questo caso se abbiamo una grandezza che supponiamo divisibile, le singole parti sono solo potenzialmente, perche' la grandezza e' data come un tutto unico. <u>La divisione in 2, 3, 10, 10000 parti uguali non e' cosi' evidente come la distinzione che si ha tra gli elementi di un insieme finito</u>.
Ammettiamo per il momento senza approfondire che per ogni grandezza si possa facilmente compiere questa divisione in n parti uguali, dove n e' un intero naturale qualunque. La cosa non e' affatto chiara ne' cosi' evidente come puo' sembrare, e' uno dei problemi che la matematica si e' tirata dietro dai tempi della mat. greca. Dividere un segmento in n parti uguali si riesce a farlo col teor. di Talete, con costruzioni ben determinate; dividere una qualunque grandezza in n parti uguali e' un'operazione per fare la quale non si puo' dare un criterio generale.

V Occorrerebbe enunciare una proprieta' fondamentale delle grandezze che e' quella cosiddetta della <u>continuita'</u>, che differisce dalla indefinita divisibilita', ma che noi non tocchiamo, accettiamo dall'intuizione concreta; anche se questo non e' vero; se volessi essere pignolo, invece di dire che ho un litro d'acqua dovrei dare il numero di miliardi di molecole contenute in una bottiglia; se questa quantita' e' dispari, non puo' essere divisa in due parti uguali. Solo l'intuizione ci presenta il fluido come un continuo. I Greci che quando parlavano delle cose volevano costruirle si sono trovati ingabbiati nel problema di dividere un angolo in tre parti uguali con gli strumenti elementari.
Noi accettiamo questo discorso perche' poi vogliamo superarlo per

arrivare alla rappresentazione con linguaggio matematico di questi enti che stiamo indagando.

VI Se accettiamo almeno provvisoriamente la possibilita' di dividere in parti uguali ecco che abbiamo la n-esima parte di una grandezza; e quindi abbiamo il multiplo della n-esima parte di essa, e quindi veniamo a dare la frazione (non con quel discorso sbrigativo che hanno fatto a me), simbolo che ha un significato in quanto richiama operazioni precise da farsi su una grandezza continua, cioe' uno di quegli enti di cui abbiamo parlato.

3/4 e' un operatore: 3/4 <u>di</u> qualche cosa, non 3/4 li' per aria.

Questo nuovo ente che abbiamo costruito a ben guardare ha senso solo come operatore, cioe' simbolo di operazioni che eseguiamo su certi enti che sono le grandezze di cui abbiamo parlato.

Non c'e' bisogno di dire queste parole difficili ai ragazzi, ma noi dobbiamo saperlo, perche' quando ci dicono: 3/4 = 6/8, chiunque direbbe: non sono uguali. Sono uguali nel senso che le operazioni da esse indicate conducono sempre allo stesso risultato; l'uguaglianza tra frazioni ha senso solo in questo ordine di idee.

Si puo' darle un altro senso facendo una teoria come suol dirsi analitica dei razionali, totalmente astratta, ma non la voglio fare perche' dobbiamo seguire la via del buonsenso, cioe' la strada che ci e' indicata da come sono nate queste cose, perche' questa volta veramente l'evoluzione storica del concetto indica la strada di minore resistenza per apprenderlo.

C'e' stato si' qualche infelice che innamorato del rigore di certe teorie ha voluto introdurle nella scuola media ed elementare. Un certo Sebastiano Catania che era allievo di Peano ha scrito un libro di aritmetica razionale per le scuole normali esponendo l'aritmetica secondo i criteri di Peano. Quel discorso era l'eco di un secolo di critica e non si poteva certo digerire subito; se qulche maestra l'ha portato nella scuola immagino il disastro. Cosi' come il libro di fondamenti di geometria di Veronese porta l'intestazione: "Per le scuole normali". Non credo che molte delle maestre potessero capire la preoccupazione di Veronese di costruire una geometria indipendentemente dal postulato di Archimede.

Io mi tengo attaccato alla nascita concreta di questi strumenti.

3/4 = 6/8 nel senso detto: l'intuizione e' immediata. Prendo una grandezza e divido in 4 parti uguali, ne prendo 3; se divido in 8 parti uguali, invece che 3 devo prenderne 6; "moltiplicando o dividendo per uno stesso numero ... la frazione non cambia": e' l'operatore che non cambia. Insisto perche' cio' che e' la cosa veramente importante non e' la singola frazione, ma la classe di infinite frazioni che rappresentano lo stesso operatore: la classe di equivalenza, come si dice in linguaggio moderno.

VII Quindi come voleva Peano la singola frazione perde importanza; anzi Peano non voleva che si parlasse di frazione, ma di <u>numero</u> <u>razionale</u>. Il numero razionale non e' la singola frazione, e' la classe di equivalenza, ma e' rappresentato da una qualunque delle frazioni della classe di equivalenza. La proprieta' che caratterizza le frazioni di una stessa classe e' che in quanto considerate come operatori tra grandezze danno tutte lo stesso risultato. Come per i numeri pari: numero pari non e' solo il 2, ma la classe dei numeri pari; cioe' la classe dei numeri che hanno tutti la stessa proprieta', che divisi per 2 danno resto zero, e' rappresentata da un numero pari qualunque, il

2 o il 10 o il 10000 ecc.
Sfumano nelle nebbie una quantita' di operazioni particolari sulle quali si fa convergere l'attenzione immeritatamente; ad es. la riduzione ai minimi termini. Insegnamo che due frazioni sono equivalenti e poi diciamo: non devi scrivere 30/40 ma 3/4 ! Cio' non vuol dire che non si debba insegnare che cosa vuol dire che una frazione e' ai minimi termini. Ormai pero' abbiamo strumenti di calcolo che tutti i ragazzini hanno in cartella (e che utilizzano una particolare tecnica per rappresentare i numeri razionali su cui torneremo tra breve), quindi il fatto che certi numeri siano piccoli (secondo noi) e che le operazioni si possano fare facilmente non e' una gran cosa.
Numero razionale e' dunque l'astratto, la classe di equivalenza che posso rappresentare in infiniti modi; non c'e' un rappresentante eletto, un presidente della classe.
Apro una parentesi sull'espressione "numero razionale". Il termine "razionale" non fa riferimento all'uso della ragione, razionale significa numero esprimibile con una coppia di interi, come rapporto tra due grandezze. Poiche' il rapporto tra due grandezze i Greci lo chiamavano logos, che significa tante cose: parola, concetto, rapporto; tradotto in latino: ratio, che vuol dire ragione, ma anche rapporto. Ecco che allora il n. che si esprime col rapporto tra due interi si chiama razionale, e il numero irrazionale e' quello non esprimibile col rapporto tra due interi. In Greco anche arretoi, non dicibili, non esprimibili; ma non vuol dire irragionevoli. E' cio' che spingeva Platone a dire che la geometria e' superiore all'aritmetica, perche' mentre l'aritmetica non e' capace di esprimere con un solo simbolo il rapporto tra il lato e la diagonale del medesimo quadrato, che e' un numero irrazionale, la geometria te lo mette sotto il naso.

VIII <u>Chi ci autorizza a chiamare numeri questi operatori tra grandezze?</u> Perche' li chiamiamo <u>numeri</u> razionali?
Perche' con questi nuovi enti riusciamo a definire delle operazioni, somma e prodotto, che hanno le stesse proprieta' formali delle op. di somma e prodotto dei numeri che gia' conosciamo, che sono i numeri interi naturali; e' il cosiddetto <u>principio di permanenza delle proprieta' formali</u> che ci porta ad estendere l'ambito di questi concetti.
Abbiamo gia' detto che non e' sufficiente l'impiego del linguaggio matematico (ad es. parlare di differenziale, di funzione, ...) per fare della matematica: l'importante e' usare i simboli in modo che essi traducano il risultato delle operazioni che eseguiamo e traducano le relazioni tra gli enti che studiamo.
Chiamiamo numeri questi nuovi enti perche' riusciamo a definire su di essi delle operazioni da chiamarsi somma e prodotto le quali hanno le stesse proprieta' formali delle operazioni somma e prodotto che gia' conosciamo sugli enti che gia' trattiamo come numeri. Inoltre esiste una sottoclasse di questi enti che abbiamo costruito che si comporta come se fossero numeri naturali: e' quella delle cosiddette frazioni apparenti, in cui il numeratore e' multiplo del denominatore. Questi discorsi ci autorizzano a chiamare numeri questi enti e a dire che costituiscono un'<u>estensione dei numeri naturali</u>, estensione nel senso che sono capaci di dire qualcosa di piu'.
In particolare la somma di due razionali ha senso solo se essi hanno uguale denominatore; dal punto di vista concreto e' un discorso di assoluto buonsenso: se devo sommare delle parti di

grandezze, se quel multiplo che ottengo deve avere senso deve essere multiplo di certe grandezze che sono sempre tutte uguali tra di loro: quindi devo trovare un sottomultiplo comune, cioe' un denominatore comune.
Queste definizioni sono dettate dal significato di questi enti, anche se esso a volte e' un po' difficile da tirar fuori. Il prof. Marinoni studia da decenni i manoscritti di L. da Vinci, dai quali decifrando le annotazioni sui margini si deduce che L. sbagliava a sommare le frazioni: invece di chiedere aiuto a Luca Paciolo che era suo amico e sapeva la matematica, si arrangiava da solo e faceva errori. Se anche L. inciampava, questo mi convince ancor piu' che il concetto di numero raz. e di frazione non e' poi cosi' chiaro come puo' sembrare a prima vista.
Mi preme identificare i punti in cui piu' si inciampa, per aiutare i nostri piccoli clienti. A tale scopo, una della tecniche e' fare le cose semplici e non presentare un vocabolario complesso. Puo' capitare pero' come abbiamo visto ad Usmate che presentiamo un concetto pensando di renderlo chiaro e invece provochiamo fissita' funzionali: cioe' l'assunzione non solo del concetto, ma anche di circostanze accessorie con cui abbiamo creduto di spiegarlo, le quali si attaccano quasi indelebilmente al concetto, rendendolo piu' oscuro. Meno cose diremo, memno confusione provocheremo; meno vocabolario tecnico si usa, piu' si facilita non solo la comprensione ma anche l'appropriazione del concetto.
In questo ordine di idee notiamo che su tutti i sussidiari si insiste sul fatto di prendere il <u>minimo comun denominatore</u>, che e' il minimo comune multiplo di tutti i denominatori, e si trova facendo la scomposizione in fattori primi e prendendo tutti i fattori comuni e non comuni col massimo esponente. Tutte cose vere ma non cosi' importanti : il fatto veramente importante e' che il denominatore sia lo stesso per tutte le frazioni, che sia il minimo e' un di piu'. Molto piu' grave era l'errore di Leonardo, che sommava frazioni che non avevano ugual denominatore: e' un errore concettuale.
Non sto a ripetere come si fanno le moltiplicazioni tra gli operatori, perche' se prendo i 2/3 di 4/5 ecc. ecc.
In piu' e' possibile, ed e' questo un vantaggio di questi nuovi numeri, definire l'inverso o reciproco di un numero qualsiasi, l'inverso di a/b e' b/a, perche' il loro prodotto e' ab/ab. che mi da' la classe di equivalenza di 1 (numeratore uguale al denominatore).
Questi numeri razionali ci permetteranno di risolvere tutta una quantita' di problemi sulle grandezze che i numeri interi non ci permettevano di risolvere.

IX Quale e' il significato veramente importante di questi discorsi, quali problemi nascono da questi numeri, che sono gli strumenti piu' importanti di cui possiamo disporre per rappresentare studiare e conoscere la realta'?
Immediatamente contiguo con il discorso dei razionali sta il discorso della <u>misura</u>; l'operatore tra grandezze puo' essere anche rappresentato come il rapporto tra due grandezze: se io dico che la grandezza A e' i 2/3 della grandezza B, allora possiamo convenire di dire che il rapporto tra la gr. A e la gr. B e' come 2 sta a 3, ovvero che il razionale 2/3 e' il rapporto tra le due grandezze. Questo e' un passo ulteriore per leggere le cose. Non solo ma noi possiamo in questo caso fissare la grandezza B e diciamo che abbiamo scelto una unita' di misura, e allora ogni

altra grandezza della classe di grandezze omogenee determina un numero razionale e viceversa e' determinata da un numero razionale.
Questo e' uno dei pilastri portanti della nostra civilizzazione. Gli Indiani d'America, gli aborigeni d'Australia, gli Etiopi, ma nemmeno gli Egiziani e i Caldei avevano fatto questo passo che e' stato fatto dai Greci, il rappresentare una grandezza con un simbolo, l'operazione di misura. Si diceva si' che una grandezza e' 3 volte tanto un'altra, ma basta vedere i famosi problemi aritmetici che noi conosciamo risolti dagli Egiziani e dai Caldei per capire quale abisso separi la scienza di quella gente dalla scienza occidentale, perche' questa operazione di misura e' uno dei crocicchi fondamentali della nostra conoscenza scientifica del mondo. Noi diamo un simbolo numerico e con quello rappresentiamo ogni grandezza, purche' beninteso sia stabilita un'unita' di misura. Non ho piu' bisogno di mandare il campione, il re A di dire al re B: mandami tanto peso d'oro, e di mandargli un sasso che pesi quel tanto d'oro; oppure come tributo tanto olio, e mandargli le giare da riempire. Basta mandargli un numero che designa la quantita'.

Rosita Lei non pensa che a questa conclusione siano arivati dopo aver faticato tanto a mandare il sasso come campione?

prof.M. Certo, io penso che il progresso umano sia dovuto agli uomini intelligenti e pigri, che volevano risparmiare la fatica. Tuttavia non e' che per millenni gli uomini avessero voglia di far fatica: hanno dovuto farla e buonanotte, finche' e' arrivato qualcuno che e' riuscito a far fare la fatica alle forze della natura. Pensi solo ai mezzi di trasporto che avevamo due generazioni fa: all'inizio del secolo si conosceva solo la macchina a vapore, che era fatta funzionare bruciando del carbone, ed ogni singolo pezzo di carbone che veniva bruciato era stato rotto col piccone, preso dalle mani di un uomo, caricato su un carrello e spinto: ogni singolo pezzo. E' una cosa che mi fa venire i brividi ogni volta che ci penso. Tutti quelli che a palate si buttavano nel fuoco erano stati singolarmente presi in mano da una persona. Adesso ci sono i pozzi di petrolio e noi con il petrolio che esce da quei pozzi facciamo funzionare le macchine che pompano fuori il petrolio: cioe' e' il petrolio che si pompa per conto suo.
Capisce allora qual e' il <u>significato della tecnica</u>? ma questa tecnica lei puo' utilizzarla solo se ha una conoscenza, per es. della termodinamica; io mi arrabbio sempre con i giornalisti che dicono che i Cinesi c'erano arrivati prima. Certo, i Cinesi conscevano i fuochi artificiali prima che noi li facessimo; pero' si sono fermati ai fuochi artificiali; con la scienza invece noi facciamo i fuochi artificiali che vanno sulla luna.
Un conto e' la conoscenza di tipo occasionale e artigianale, sempre ingegnosa, notiamo bene; ma e' una cosa diversa dalla conoscenza scientifica, cioe' dalla conoscenza delle cause, cioe' dalla possibilita' di estendere le conoscenze, di applicarle in altri casi, di dominare la struttura.
La macchina a vapore e' stata inventata prima della termodinamica, nella II meta' del '700, da un ragazzino che doveva aprire i rubinetti, ma aveva voglia di andare a giocare, quindi ha fatto in modo che il coperchio della caldaia per conto suo si incaricasse

di aprire i rubinetti quando andava su. La termodinamica teorica e' un frutto di un secolo dopo, e' della II meta' del secolo scorso; solo quando e' stata teorizzata la trasformazione del calore in energia si e' potuto utilizzarla in modo veramente esteso e scientifico. E' la differenza tra una scoperta artigianale intelligente ed ingegnosa e la teorizzazione scientifica.
Noi dunque diamo in mano ai ragazzini il metro, gli insegnamo il sistema decimale, ma devono imparare il significato di questa operazione grandiosa di rappresentazione con le cifre, di codificazione, di rappresentazione della realta' con gli strumenti di un linguaggio che e' quello matematico; si tratta di uno dei crocevia piu' grandiosi della nostra civilta', e lo vediamo al confronto con la altre culture, anche culture di altissimo livello di pensiero, come quella degli Indiani o dei Cinesi, che non sono arrivati a questa cifrazione della realta' mediante numeri, cioe' mediante strumenti di un linguaggio che permette di rappresentarla dal di dentro. E difatti la scienza fisico-matematica e la tecnica occidentale hanno cominciato ad esplodere quando nell'Occidente sono state importate le cifre arabo-indiane per rappresentare i numeri.
Dunque il significato ultimo delle operazioni che insegnamo e' la rappresentazione della realta' mediante gli strumenti concettuali e simbolici di un certo linguaggio. Dico concettuali e simbolici perche' a volte occorre fare distinzione tra il concetto che in certe teste puo' esserci e la difficolta' di simbolizzazione; in altri soggetti il simbolo viene utilizzato a casaccio perche' manca la struttura concettuale (come quel bambino che contava fino a 49, ma in realta' recitava la filastrocca, le parole avevano per lui significato concreto solo fino a 10 o 12); abbiamo allora un divario tra simbolo e simbolizzato, e l'operazione a mio parere piu' importante della scuola e' cercare di eliminare questo divario, non di insegnare parolone sempre piu' grosse.
Cio' che insegnamo e' veramente una cifrazione della realta', cioe' un tradurre la realta' in forme simbolica cifrata; cifra non nel senso di numeri, ma di una specie di codice di rappresentazione; codice non tanto segreto, ma che noi dobbiamo imparare ad utilizzare e a leggere in andata e in ritorno. Non esisterebbe la scienza di oggi se non ci fosse questa operazione fondamentale sulle grandezze, che e' la traduzione in simboli numerici delle cose che noi vediamo e dei rapporti tra le cose.
Rapporti tra le cose: perche' se noi misuriamo due grandezze e otteniamo due numeri razionali; facciamo poi una certa operazione tra le grandezze che e' quella di somma di cui abbiamo detto, otteniamo una terza grandezza la quale ha come misura la somma dei numeri che rappresentano le prime due. Abbiamo simboli talmente ben fatti che riproducono con le loro leggi le operazioni concrete che noi facciamo sulla realta', quindi ci permettono di predire quale sara' il risultato delle nostre operazioni e delle nostre manipolazioni. Predire cioe' prevedere: se so che consumo tanti litri/km, e che devo fare tanti km con la macchina, so che devo metterci tanti litri di benzina. Se so che la stoffa costa tante lire/m, e che devo fare un abito per mio nonno, devo premunirmi di una certa somma di denaro.
Noi facciamo tutti i giorni questi discorsi senza renderci conto di quale sia il significato per la conoscenza della realta' e dei rapporti che ci e' fornito da questo linguaggio che abbiamo

imparato. Alle cose straordinarie ormai siamo abituati, ma se pensiamo ai millenni di costruzioni concettuali che ci sono voluti, cominciamo a stupirci.
In questo senso la matematica e' chiave di lettura della realta': non che questo sia l'unico modo di conoscere, ne' che le cose che rappresentiamo coi numeri siano solo le grandezze; ma l'enorme maggioranza delle cose che manipoliamo appartengono a questa classe, e le manipoliamo e le conosciamo proprio perche' le manipoliamo e le conosciamo con questi strumenti concettuali e linguistici; intendendo per linguistici qualcosa in piu' dei concetti, cioe' gli strumenti per rappresentare i concetti, per comunicarli e per operare su di essi.
La mente umana e' fatta in modo misterioso, puo' anche ragionare senza parlare; ma se trova dei simboli e' meglio. Anche la filosofia scolastica parlava della species expressa, cioe' del concetto che si forma esplicitamente nella nostra mente e che rappresenta a tutti gli effetti un determinato essere; se si vuol poi fare tutta la scienza nel senso esteso del termine bisogna anche saper esprimere questo concetto, bisogna poterlo comunicare, poter dare rappresentazioni obiettive della realta'.

Domanda E' sbagliato mettere il segno di uguale tra due frazioni equivalenti?

prof.M. Mettiamo pure il segno di uguale, pero' dobbiamo sapere che cosa vuol dire quell'uguale.

A.M. E se dico loro che non sono uguali ma equivalenti, cioe' valgono la stessa cosa, e' corretto?

prof.M. Si, e' corretto. Preferirei dire che producono lo stesso effetto. Ma dire che valgono la stessa cosa e' poi lo stesso. Diciamo pure che sono equivalenti anziche' che sono uguali, intendendo che quella uguaglianza puo' significare equivalenza, e intendendo che equivalenza vuol dire uguaglianza di risultato, di effetto come operatore. L'importante e' che noi lo sappiamo.
Peano giustamente dice: quando scrivo 2=2, che cosa significa? il 2 di sinistra sta a sinistra,non e' uguale a quello di destra. Allora che cosa significa quell'uguale? Quelli sono nomi di una medesima cosa, cioe' l'identita' sta nelle cose rappresentate; come quando scrivo 3+5=8 : per un tipografo non e' vero, i segni che stanno a sinistra non sono quelli di destra. Sono nomi di un medesimo concetto.
Allora la famosa definizione di Leibnitz: "quidquid praedicatur de uno praedicatur etiam de altero" non e' vera, infatti questo sta a sinistra e quest'altro a destra. Non tutto, ma tutto quello che ci interessa in base ad una certa scelta, cioe' in base alla classificazione di una classe di equivalenza, come abbiamo detto facendo l'esempio del biglietto da 1000 e delle due monete da 500. Ogni volta dobbiamo tener presente qual e' l'universo nel quale iscriviamo queste operazioni che indichiamo con l'= o che chiamiamo equivalenze.
Il discorso fondamentale e' che una medesima cosa puo' essere

rappresentata in infiniti modi diversi, ma e' sempre la medesima: medesima come risultato ottenuto.

8 aprile 1991
XI Incontro col prof. Manara
(appunti non rivisti dall'Autore)

Dicevamo la volta scorsa: 2 diviso 3 non si puo' fare, allora chiamiamo 2/3 la frazione. Che discorso e'? No, 2 diviso 3 e' un operatore, 2 diviso 3 di qualcosa (v. S.Baruk).
La difficolta' dei ragazzi e' di passare dal numero numerante (come dicevano gli scolastici: numerus numerans, cioe' il numero come concetto attaccato ad un certo aggregato) al numero considerato come concetto astratto. Analogamente per le frazioni: dobbiamo imparare a passare dalla singola frazione alla classe delle frazioni equivalenti che come un tutto unico vengono chiamate in matematica <u>numero</u> <u>razionale</u>.
Abbiamo spiegato che cosa significa numero razionale, dal latino ratio, traduzione del greco logos, che significa pensiero, concetto ed anche rapporto, tra due numeri o tra due grandezze. Per questo si parla anche di ragione di una certa successione.
Anche il numero intero puo' essere pensato come operatore: numero di, oppure: tre volte una certa grandezza; in questo caso il tre e' un operatore che fa passare da una grandezza al suo triplo. Anzi in francese e in inglese la moltiplicazione e' chiamata "volte": 3 fois 2; in inglese "times"; e' il concetto di operazione, di numero visto come operatore su grandezze.
Allora, se immaginiamo le grandezze cosi' come le abbiamo presentate la volta scorsa come infinitamente divisibili, tali quindi che si possa parlare di un sottomultiplo, ecco che possiamo parlare di frazioni o meglio di classi di frazioni equivalenti come operatori sulle grandezze. 3/4 non ha senso se non sono 3/4 <u>di</u> qualcosa; lo stesso 30/40 ecc.; quel segno di uguale scritto tra due frazioni che chiamiamo uguali o meglio equivalenti significa che come simbolo di operazioni applicate ad una medesima grandezza danno lo stesso risultato.
Questa sarebbe come si chiamava una volta la <u>teoria</u> <u>sintetica</u> <u>dei</u> <u>numeri</u> <u>razionali</u>, che ho presentato cosi' perche' per me e' la piu' semplice ed attaccata alla realta' quotidiana, perche' immaginiamo di lavorare sulle grandezze e che le grandezze abbiano le proprieta' di cui abbiamo detto.
Ho anche detto che giustifichiamo la trovata di chiamare numero una frazione perche' riusciamo a definire somma e prodotto. Le regole per il calcolo le conosciamo tutti; l'importante e' pero' sapere dove i conti ci conducono, che senso hanno, su che cosa si basa la possibilita' di farli. Archimede lavorava cosi'; quando ha fatto la ricerca sull'area del cerchio, dava l'approssimazione per difetto e per eccesso dell'area del cerchio mediante frazioni, sempre piu' approssimate al risultato. Questo era il modo di lavorare degli antichi Greci e anche Romani.
Nasce una difficolta': dato che abbiamo nella nostra civilizzazione occidentale un insieme di convenzioni per rappresentare i numeri, insieme di convenzioni che fanno perno su due scelte, quella della base 10, e quella della scrittura posizionale, si usano queste convenzioni anche per rappresentare i numeri frazionari, o numeri razionali, e quindi abbiamo quelli che nei programmi (risalendo fino alla riforma Gentile, di prima non mi sono informato) vengono chiamati impropriamente numeri decimali, il che indurrebbe una persona che conosca la

lingua italiana a pensare che si tratti di nuovi numeri: ci sono gli interi, le frazioni, e poi i numeri decimali. E infatti i nostri ragazzini considerano i numeri decimali come una nuova specie misteriosa; invece sono modi determinati particolari di rappresentare le frazioni, cioe' utilizzando le convenzioni della nostra numerazione, in particolare oltre ai multipli di 10 anche i sottomultipli: 1/10 , 1/100 , ecc.
Questa e' l'idea fondamentale, che da' luogo a difficolta' ed equivoci di cui parleremo subito. Le convenzioni abituali, a partire dall'entrata in vigore delle cifre arabe, ci portano ad utilizzare una particolare specie di frazione, che e' la frazione che ha al denominatore una potenza del 10. Da cui le consuete scritture con la virgola (anzi col punto per l'imperare degli anglosassoni). Ad es. 913,45 significa 9x100 + (l'accostamento delle cifre sottintende la somma) + 1x10 + 3x1 + 4x1/10 + 5x1/100.
Questa scrittura sintetica vuol dire una somma di interi a sinistra della virgola, una somma di potenze del decimo, cioe' del reciproco della nostra base, a destra della virgola.
Ne seguono le varie regole: che cosa significa incolonnare le virgole? che per sommare le frazioni occorre scriverle tutte con lo stesso denominatore. Ad es se volessi sommare a 913,45 il numero 7,6 (che vuol dire 7x1 + 6x1/10) la legge delle frazioni dice che devo metterle tutte con lo stesso denominatore; mi risulta (70 + 6)/10 , e per il numero precedente (9x10000 + 1x1000 + 3x100 + 4x10 + 5x1)/100.
Ma avendo una frazione con denominatore 10 ed una con denominatore 100, devo moltiplicare per 10 num. e den. della prima ottenendo (700+60)/100 ; ora sommo con denominatore 100. Mettere in colonna il punto decimale significa solo ridurre queste frazioni ad uguale denominatore. Nei programmi scolastici viene presentata la regola di mettere in colonna senza giustificarla in alcun modo. Le regole formali per operare con queste rappresentazioni particolari non sono altro che le regole di calcolo delle frazioni adattate a queste convenzioni.
C'e' pero' un'ulteriore difficolta': se noi scegliamo questo modo di rappresentare i numeri razionali, cioe' mediante frazioni che hanno al denominatore 10 o potenze di 10, cadiamo inevitabimente nella difficolta' di dover utilizzare un procedimento infinito. Per es. se io prendo 2/3, o 4/6, o 20000/30000, e lo voglio rappresentare in quella forma, mi viene 0,6666...., e l'operazione non finisce mai: lo stesso numero che potrebbe essere scritto con due interi mi viene rappresentato con un simbolo infinito. Se cambiamo base, ad es. prendiamo la base 3 o 7 o 11, alcuni numeri razionali in quella nuova base vengono rappresentati in forma finita, ma altri in forma infinita, non si scappa. Questa e' una difficolta' inerente alla scelta che facciamo di rappresentare con queste convenzioni, cioe' con questi simboli e con una scelta di base, i numeri razionali.
Gli equivoci sono molti. Nei programmi c'e' scritto: numeri decimali fino ai millesimi. E cosi' si forma in alcuni l'idea che fermarsi ai millesimi basti. Che cos'e' un millesimo? ad es. 1 g rispetto ad 1 kg, 1 mm rispetto ad 1 m non conta piu' niente. Cosi' c'e' scritto sui programmi.
Da un lato si tratta di non seviziare i ragazzini, ma dall'altro ci sono difficolta' concettuali: "praticamente" bastano tre cifre decimali. Caso tipico: le tabelle che danno $\sqrt{3}/2$ (apotema dell'esagono regolare) = 0,866 e basta. Numero magico.

Oppure, in un libro ho visto scritto: 2/3=0,666...; valore esatto: 0,67 !
Questa idea limitata trascura un fatto fondamentale: non esistono numeri piccoli e numeri grandi, l'avverbio "praticamente" in matematica non ha senso, e' un discorso da evitare, o meglio da riservare ai casi pratici in cui la mat. diventa uno strumento di rappresentazione della realta', perche' allora di volta in volta in relazione alla realta' da rappresentare e al problema da risolvere questo ha un significato.
Ci possono essere casi in cui bastano due o tre cifre decimali, casi in cui ne occorrono 20 per avere un risultato giusto.
Come non ha senso dire dove finisce il prato e comincia il bosco fino ai cm: ogni concetto nasce con un proprio ordine di approssimazione. Il concetto di prato e di bosco (una certa densita' di piante ad alto fusto al m^2) nascono con un ordine di grandezza al di sotto del quale non ha senso piantare la grana.
O dare il numero degli abitanti della terra all'unita', quando non siamo sicuri nemmeno dei miliardi; o i dati del totocalcio fino alle lire; o l'altezza del Monte Bianco fino ai cm; sono tutti esempi di valutazioni che non corrispondono a nessuna osservazione sensata concreta possibile da fare sulla realta'; sono casi in cui la matematica e' usata male nell'altro senso, perche' le si da' un compito di rappresentazione precisa della realta' che non e' consono al discorso che stiamo facendo nel linguaggio applicato a quella realta'. E' la falsa precisione matematica.
Che cosa vogliono dire allora questi discorsi, queste cifre infinite?
Se facciamo 2 diviso 3, a seconda della macchinetta che utilizziamo otteniamo 0,6666666 o 0,6666667. Ma allora se un ragazzino dicesse: la maestra ha detto che per fare la prova della divisione bisogna moltiplicare il risultato per il divisore, e lo facesse, otterrebbe nel primo caso 1,9999998 e nel secondo 2,0000001. Allora o l'aritmetica e' sbagliata, o ha sbagliato la maestra, o e' rotta la macchinetta.
Il discorso e' piu' semplice ma piu' profondo: questi discorsi ci danno informazioni che dobbiamo saper interpretare e di cui dobbiamo capire il significato, perche' questo e' il punto di partenza per usare bene la matematica.
Che cosa vuol dire 0,8666.... ? Dobbiamo scrivere dei puntini perche' le convenzioni di rappresentazione dei numeri razionali e non solo di quelli mi dicono che questo simbolo non necessariamente mi da' il valore giusto ma mi da' delle informazioni che sono le seguenti: il valore vero, chiamiamolo x, e' compreso tra quello scritto e quello che si ottiene aggiungendo una unita' all'ultima cifra a destra. Ci sono quindi dei casi come questo in cui un numero razionale, cioe' esprimibile come rapporto di interi, non puo' essere rappresentato in forma finita.
Un ragazzino diceva: per far finire la divisione bisogna sbagliare. Questo simbolo infatti non vuol dire valore giusto, che in questa forma non si otterra' mai, ma che abbiamo un intervallo all'interno del quale sta il valore giusto.
La precisione matematica sta nel dire solo cose vere. In questo caso, che aumentando di 1 l'ultima cifra ottengo un valore approssimato per eccesso, e quello vero e' compreso tra quello per difetto e quello per eccesso. Purtroppo certe macchinette o tabelle danno i valori arrotondati, cioe' se la prima cifra trascurata e' maggiore di 4 aggiungono una unita', diversamente la

trascurano. Peano si e' battuto contro questa abitudine perche' quando si fanno i conti non sapendo piu' se i valori sono dati per eccesso o per difetto non si domina l'errore.
Le rappresentazioni che si ottengono solo trascurando le cifre da un certo posto in poi vengono dette valori troncati, quelle che si ottengono con la regola detta sopra valori arrotondati (v. il 740, arrotondamento alle 1000 lire).
Il significato di queste informazioni e' che secondo le convenzioni abituali abbiamo un intervallo in cui la misura vera e' contenuta. Ma il punto piu' importante e' un altro: che la matematica mi da' strumenti per migliorare l'informazione quanto voglio; in questa forma non te la posso dare giusta, ma la posso migliorare quanto vuoi secondo le tue necessita'. Se devi misurare un campo non servono i millimetri, se devi fare le sfere per i cuscinetti a sfera sono grossissimi.
Allora perche' fermarsi ai millimetri?
Mi sono divertito a calcolare la differenza tra il lato del miriagono regolare (poligono regolare di 10000 lati) e l'arco di circonferenza sotteso. La differenza e' dell'ordine di pochi centimetri su 34 km (lunghezza dell'arco). Ma se devo andare sulla luna quei pochi cm vengono moltiplicati per miliardi e miliardi di volte ...
Altro es. che faccio spesso: prendo la circonferenza circoscritta al quadrato di lato 1; il diametro e' $\sqrt{2}$, che sulla macchinetta risulta 1.4142136 ; moltiplicato per 3.14 da' 4.4406307 . Se uno fa i conti si accorge che quelle cifre sono tutte sbagliate, il valore e' tra 4.442 e 4.443. E' il caso tipico in cui abbiamo misurato la diagonale fino ai decimillesimi e abbiamo poi preso la costante di Archimede con l'approssimazione di un millesimo. Risultato, come diceva la filosofia antica: peiorem sequitur semper conclusio partem, la conclusione segue sempre la parte peggiore; gli errori sono sempre quelli dei fattori piu' sbagliati: un fattore e' ai decimi di milione, l'altro all'un per cento, il risultato e' sbagliato all'un per cento.
Che cosa vogliono dire quelle informazioni? che la $\sqrt{2}$ non e' quella li', e' compresa tra 1.4142136 e 1.4142137; π tra 3.14 e 3.15; facendo i prodotti si vede quali sono le cifre comuni, e allora si vede qual e' l'intervallo di errore. Se uno vuol fare i conti e trovare le cifre giuste, bisogna prendere i due fattori con lo stesso ordine di approssimazione, cioe' con lo stesso errore; altrimenti il risultato e' infettato dall'errore del fattore che ha l'errore maggiore. Del resto a buon senso la matematica non da' le informazioni gratuite: se nei suoi dati mettiamo l'errore dell'1%, non possiamo presumere che la mat. inventi le informazioni fino al decimo di milione...
Conviene invece prendere 5 cifre per ognuno, e fare i prodotti usando i valori per difetto e per eccesso. Allora si' viene fuori l'intervallo giusto, cioe' l'informazione onesta delle cose che si possono dire a termini di matematica.
Anche questa fissazione che $\pi=3.14$ e' una delle tante magie. Quando ero un ragazzino la mia maestra diceva: il 3 si vede, il 14 e' stato calcolato dai matematici. Invece il mio maestro prof. Chisini diceva: prendi un vaso e una cordicella (o anche un filo d'erba o un giunco); prima misuri il diametro e fai un nodo; poi giri intorno alla circonferenza del vaso e tagli ; vedi quante volte ci sta: 3 volte piu' un pezzettino; tagli via quel

pezzettino e vedi quante volte ci sta nel diametro, viene 7 volte: 3 e 1/7, e' il valore che dava Archimede e anche Pascal, 22/7. 22/7 e' un numero razionale abbastanza vicino a 3,14, e' 3,142857 (periodico).Se ho bisogno di un'approssimazione minore mi basta anche 3 (come c'e' scritto nei Paralipomeni e nel III libro dei Re, dove e' descritta la costruzione del tempio di Salomone da parte degli artigiani fenici, che avevano fatto un bacile di bronzo di 10 cubiti da un labbro all'altro e circondato di un cordone di 30 cubiti), se ho bisogno di un'approssimazione maggiore devo andare avanti.
Riassumendo, partendo dal concetto di numero razionale, che e' l'intera classe di equivalenza di frazioni equivalenti, intese come operatori su grandezze continue (e noi viviamo nella pratica in mezzo a grandezze su cui ha senso operare con questi operatori), arriviamo alla scelta di una determinata rappresentazione che e' la rappresentazione decimale dei numeri razionali. Capita allora che ci sono numeri razionali che possono essere rappresentati in forma finita, es. 3/4 che da' 0.75, e ci sono numeri, e sono la maggioranza, che non possono essere rappresentati in forma finita: ma non e' che siano sbagliati, siamo noi che ci ostiniamo a scegliere una certa rappresentazione. Tali numeri sono tutte le frazioni tranne quelle che ridotte ai minimi termini hanno al denominatore solo i fattori 2 e 5 (cioe' quelli che rientrano nel costruire la nostra bae di numerazione). Se c'e' un fattore diverso, si ottiene un numero che suole chiamarsi decimale periodico, cioe' in cui le cifre dopo il punto decimale si riproducono con regolarita' da un certo posto in poi.
Bisogna saper leggere le informazioni. Se si tratta di numeri troncati (certe tavole segnalano quelli arrotondati stampando l'ultima cifra in grassetto) la vera informazione consiste nel fatto che il valore vero e' compreso tra ...
La cosa piu' importante e' che l'informazione e' sbagliata ma e' migliorabile infinitamente a nostra volonta' e a nostra necessita'. Il significato va valutato ogni volta in relazione al problema concreto. Posso tener conto dei millimetri sulle decine di chilometri se c'e' bisogno, come nel caso della differenza tra l'arco e il lato del miriagono regolare. Ogni volta l'informazione va presa nell'ordine di grandezza che interessa e che e' ragionevole adottare in quel momento, in relazione al problema concreto. Fermarsi ai millesimi poteva avere un significato pratico; oggi non l'ha piu', dato che ogni ragazzino ha una macchinetta calcolatrice. Fermiamoci pero' pure ai millesimi, ma dobbiamo sapere che significato ha; quindi certe tabelle,non quelle dei pesi specifici che sono risultato di misure e quindi hanno un loro significato (ad es. sono arrivato a misurare una certa grandezza a meno di 10^{-5} e piu' in la' non sono stato capace di misurare), ma quelle geometriche ad es. degli apotemi dei vari poligoni regolari, dati come se fossero numeri decimali finiti, sono sbagliate.
Ho letto una volta su un certo giornale le disquisizioni di un filosofo che parlava di sezione aurea e imbastiva mezza pagina di giornale sul fatto che la sezione aurea e' 0.618, spiegando il valore di questo numero. E' un'informazione sbagliata: bisogna dire che e' compresa tra 0.618 e 0.619.
O come Leibnitz che diceva che la forza viva non puo' essere scritta $1/2mv^2$, perche' una cosa cosi' nobile non puo' tollerare un coefficiente 1/2. O il tizio che che diceva che le

orbite dei pianeti non sono ellissi: in un fuoco c'e' il sole, ma nell'altro che cosa c'e'? O l'altro che diceva che la costante di gravitazione non puo' essere espressa con tante cifre decimali, deve essere un intero. O come quell'architetto che diceva che le sue case sono fatte sul ritmo di 1.20 m, perche' il 12 e' un numero molto piu' importante del 10.

-Enrica Vorrei riprendere il discorso sulle frazioni equivalenti. I miei alunni hanno cominciato a parlare di frazioni prima che io gliene parlassi,a giocare coi quarti, gli ottavi ecc.
Il fatto che il mio quarto di mela potesse essere tagliato in fettine sottilissime ma la somma restasse ancora un quarto e' piaciuto moltissimo. Allora in un quarto ci sono due ottavi...e cosi' via.

-prof.M. Spesso l'evoluzione storica di un concetto ci da' l'indicazione della strada piu' semplice per presentarlo...

22 Aprile 1991
XII incontro col prof.Manara

(appunti non rivisti dall'Autore)

-Enrica Come dicevo l'altra volta, mi sono trovata a fare le frazioni su intervento dei bambini. A loro viene anche naturale trovare le equivalenze delle quantita' che considerano.

-prof.M. La cosa non mi stupisce perche' e' lo sviluppo storico del concetto, l'umanita' e' arrivata attraverso questa strada.

-E. Io ho avuto la fortuna di vivere un'infanzia molto concreta e pratica, vendendo il latte capivo bene quello che facevo se parlavo di mezzi litri, di quarti ecc. Le mie compagne invece erano in difficolta' con le frazioni. Nella mia esperienza di insegnante mi sono basata sulle proposte didattiche generali: ad un certo punto si fanno le frazioni, non si sa bene perche', poi l'equivalenza delle frazioni ecc. Invece dalle sue lezioni si e' ribaltato tutto il discorso; la cosa che mi ha stupita di piu' e' che mi sono trovata a viverlo esattamente con la logica dei bambini.

-prof.M. E' un esempio della validita' del discorso biologico che l'ontogenesi ricapitola la filogenesi. Poiche' storicamente il concetto si e' sviluppato cosi', e' naturale che i bambini ci arrivino in questo modo.
Noi a volte sminuzziamo, pensando che il pezzetto sia piu' semplice: invece il ragazzino non riesce a metterli insieme.

-E. Mi e' anche stato molto utile il lavoro che da anni portiamo avanti con la dott.Davoli, il fatto di insistere moltissimo sulla convenzione posizionale e sulla base 10. Ora stiamo riepilogando discorsi sulla divisione e moltiplicazione, in particolare per 10, per 100 e per 1000. Quando faccio esempi, mi capita di farli nell'ordine delle decine centinaia e migliaia complete; ma allora un b. mi ha chiesto: -se invece prendiamo 141 e dividiamo per 10? -Vedi un po' tu che cosa fara'. -Fa ancora 14. Ma allora un altro b. che ne aveva sentito parlare a casa dice: -virgola uno. E un altro : -14 e 1. -Che cos'e' questo "e 1"? -Se prima era un'unita' adesso e' un po' meno, pero' e' la decima parte, come un'unita' e' la decima parte della decina. -Allora possiamo scrivere 14 e 1? Qualcuno dice: -14 e resto 1.
Sono cosi' abituati a ragionare sul sistema decimale che non abbiamo ancora affrontato le misure e loro gia' gestiscono le equivalenze: diventa logico, c'e' sempre una possibilita' di riaggancio.

-prof.M. Lei mi fa un grandissimo piacere, perche' abbiamo sempre detto che la logica non va insegnata a se', ma che usiamo gli strumenti linguistici che il ragazzo possiede per agganciare la consequenzialita' logica, come dicono anche le note ai programmi.
Quanto alle frazioni, a volte un briciolo isolato di teoria viene capito meno del discorso globale.

-E. Il discorso teorico viene colto quando prima c'e' stata tutta un'attivita' pratica su cui riflettere. Mi chiedevo: quando affrontero' il discorso sulle frazioni, non credo che i ragazzi non siano in grado di capire il discorso sul numero razionale. Mi pare importante anche presentare una nomenclatura precisa: il numero razionale come rapporto, la scoperta del significato del nome penso che li aiuti a cogliere il concetto.

-prof.M. Tra i miei pallini c'e' il mirare a semplificare, a dare il senso dell'unita' del discorso matematico, che viene spesso frazionato, o dalla manualistica o addirittura dai programmi (v. es. dei numeri decimali, che non sono altro che particolari frazioni: l'unita' del concetto viene dispersa nelle varie denominazioni).
La difficolta' che si incontra con le frazioni, e si incontrera' ancora in futuro, e' abituare i r. ad usare diversi simboli per la stessa cosa: constatare l'univocita' semantica del simbolo: questa e' la difficolta' ma e' anche il momento unificatore del discorso. In geometria analitica capita lo stesso con le rette, che sono rappresentabili in infiniti modi; per lo studente puo' essere una difficolta' identificare quell'oggetto che puo' avere infinite rappresentazioni.
E' un discorso che si capisce se si riferisce alla frazione come operatore; diversamente diventa tutto una cabala, e ad es. si rifiuta il simbolo della frazione con la sbarra obliqua anziche' orizzontale.
Peano si era battuto per la scritura con la sbarra obliqua, perche' aveva comperato le macchine tipografiche delle suore della congregazione fondata dal Beato Faa' di Bruno e componeva personalmente i suoi lavori, perche' aveva inventato le notazioni di logica che furono poi rese famose nel mondo anglosassone da Russel e Withead. L'unione matematica americana raccomanda ora l'uso di quei simboli che Peano nel secolo scorso consigliava (P. in un suo lavoro calcola addirittura il costo della composizione tipografica delle formule).

-E. Quando ho cominciato ad insegnare, una delle difficolta' maggiori era la moltiplicazione coi numeri decimali: perche' moltiplicando decimi per decimi vengono centesimi? Non puoi dire ai bambini un po' svegli: conta il numero di posti dopo la virgola... Bisogna aver chiaro il discorso sulle frazioni decimali.

-prof.M. E' tutto il discorso fatto la volta scorsa sulle operazioni coi numeri decimali...

Volevo concludere oggi il discorso sulle grandezze con un concetto molto importante, quello di <u>proporzione</u>, che a volte sui sussidiari e' maltrattato, presentato in forma cabalistica, o presentato con denominazioni tradizionali, tipo la regola del 3 semplice o del 3 composto (che non ho mai saputo che cosa sia); denominazioni del secolo scorso che si sono trasferite nei programmi e nella simbologia in modo da far sembrare misteriose le cose semplici.
Cerchiamo la radice dei concetti. Vorrei riattaccare il discorso all'operazione di misura, operazione che facciamo abitualmente e che ci permette di descrivere la realta' con linguaggio cifrato e di conoscerla. Non solo infatti descriviamo la realta' ma

descriviamo le operazioni che facciamo su di essa mediante i simboli che utilizziamo per descriverla.
A Salo' sotto la Loggia della Magnifica Patria c'e' una lapide con le varie unita' di misura di lunghezza: palmi, tese,... Lo stesso a Ferrara sotto il portico del Castello. Quanto alle monete, ogni citta' aveva la sua moneta... Questo ci illustra l'utilita' di unificare le unita' di misura.
L'operazione che ci conduce a misurare l'abbiamo gia' commentata: si tratta di confrontare con l'unita' di misura, col sottomultiplo, ecc. Il nucleo del discorso e' la possibilita' di rappresentare il reale coi numeri: dalla grandezza alla misura, e (l'operazione e' invertibile, diversamente non avrebbe senso) dalla misura alla grandezza. Questo e' il primo momento, quello della rappresentazione della realta', rappresentazione semplice ma invertibile. Questo simbolismo ci permette anche di prevedere il risultato delle operazioni che eseguiamo: ho misurato due segmenti, e' inutile che io li metta uno dopo l'altro per misurare la somma, basta sommare le misure. Se ho stabilito una grandezza campione, riesco a rappresentare con un numero ogni altra grandezza.
Se ho scelto come campione il metro, e so che un determinato segmento s e' 3,5 m, invece di scrivere cosi' posso rappresentare la stessa cosa in un modo leggermente diverso che pero' permette un passo ulteriore. Si suol dire che questo numero 3,5 , che poi sono 35/10, che poi sono 7/2 , e' il rapporto tra il segmento e il metro: anziche' s=3,5 m ,si dice: s/m= 3,5 . Si suol dire che quel numero razionale, indicato da uno qualunque degli infiniti simboli che lo rappresentano, mi da' il rapporto tra le due lunghezze, quella del segmento e quella dell'unita' di misura.
Abbiamo gia' parlato dell'origine storica del termine "razionale" (a volte anche l'origine storica delle parole ci permette di capirle di piu', di non accettarle come imposte dal di fuori) dal greco λογοσ che vuol dire concetto, parola, ragione ragionante ma anche rapporto nel senso di relazione, ragione ragionata, concetto rivelato, e anche rapporto matematico, da cui la traduzione del latino ratio, che nei libri del '700 si trova tradotto in ragione, da cui numero razionale, nel senso di numero rappresentato dal rapporto di due interi; e noi aggiungiamo: numero rappresentabile in infiniti modi come rapporto tra due interi. Allora troviamo sui vecchi libri che la circonferenza sta al diametro come 22 sta a 7. Anzi siccome i classici non lavoravano con le frazioni, perche' l'uso metodico di questo simbolo e' stato introdotto dopo, loro lavoravano sempre solo con i multipli, e dicevano quindi: due volte il segmento e' uguale a 7 volte il metro, 2 segmenti sono 7 metri, e quindi non troviamo mai che il rapporto tra circonferenza e diametro e' 22/7, ma che 22 volte la circonferenza e' 7 volte il diametro; noi per leggere i classici dobiamo rifarci sempre alla nostra notazione con le frazioni, che e' piu' comoda. Questa mentalita' dei Greci che non parlavano di sottomultipli delle grandezze ha un significato epistemologico ben preciso, perche' i Greci non accettavano di parlare di cose che non sapessero costruire, e si erano trovati a dividere l'angolo in parti uguali e non c'erano riusciti, perche' in due si riesce con riga e compasso, ma in tre e' un'operazione che non si puo' fare, in cinque poi non parliamone, allora loro usavano sempre i multipli; quindi il libro di Euclide sulle proporzioni lavora sempre coi multipli delle grandezze, e noi dobbiamo per leggerlo bene

tradurre sempre in frazioni, perche' noi accettiamo l'esistenza dei sottomultipli, perche' abbiamo opportunamente meditato sul significato di questo scegliere i sottomultipli. Ma se volessimo essere rigorosi come i Greci se non facciamo la trattazione teorica della continuita' dovremmo anche noi lavorare coi multipli soltanto.
Abbiamo anche detto che il significato di numero irrazionale non e' numero irragionevole, ma numero che non e' rappresentabile con un simbolo di quel genere, ma ne chiede infiniti, che significa che non puo' essere rappresentato mai con la massima precisione, ma dobbiamo ogni volta tener conto del significato dell'informazione, che noi tuttavia riusciamo comunque a migliorare.
Se noi cambiamo leggermente non le cose, ma il modo di vedere le cose, il numero razionale ci si puo' presentare come rapporto tra due grandezze, allora il concetto di proporzionalita' viene limpido e semplice, perche' se noi abbiamo due classi di grandezze, anche non omogenee tra di loro (le grandezze della prima classe diverse da quelle della seconda classe), chiamiamole a, b, c, d, possiamo scrivere una proporzione: "a:b=c:d" (sulle macchinette troviamo i simboli a÷b=c÷d , che sono piu' visibili, non si confondono con l'interpunzione). Se queste sono per es. capacita', e queste lunghezze, ad es. di quei tubi da laboratorio graduati, il rapporto tra le due capacita' di liquido e' uguale al rapporto tra le due altezze a cui arriva il liquido. Quindi se io ho una quantita' di liquido che mi porta ad altezza doppia, vuol dire che la quantita' di liquido che ho messo dentro e' doppia. Ho fatto questo es. proprio perche' il concetto di proporzione e' svincolato dall'omogeneita' dei quattro, quelli di sinistra possono essere altezze e quelli di destra capacita', ma la proporzione vale. Naturalmente possono anche essere della stessa natura. Cosi' ci sono i teoremi di geometria: le aree dei rettangoli con la stessa base sono proporzionali alle altezze, o le aree dei triangoli... Abbiamo spiegato che cosa sia il rapporto tra due grandezze, ma lo sappiamo esprimere anche con dei simboli, con dei numeri razionali, supponendo che siano grandezze concrete, per le quali non si puo' non fare uso di numeri razionali e basta, perche' al di sotto di una certa precisione i nostri sensi e i nostri strumenti non arrivano. In teoria l'approssimazione potrebbe esere portata comunque avanti, ma concretamente nella fisica e nella meccanica dobbiamo sempre limitarci ai numeri razionali; e allora vuol dire che se il rapporto tra due grandezze e' un numero razionale, tra le altre due e' un altro numero razionale, se quei numeri razionali sono equivalenti (vorrei dire: sono uguali, sono lo stesso numero razionale: sottolineo l'uguaglianza sotto l'apparente diversita' del simbolo che li rappresenta) questo e' il modo concreto con cui lavoriamo, perche' noi non misuriamo sempre le grandezze, molto spesso misuriamo delle cose proporzionali ad esse, anzi quasi sempre; quando andiamo in macchina misuriamo la quantita' di benzina dal posto dell'indice, e cosi' via. Noi ingoiamo quotidianamente senza rendercene conto questi discorsi, fa parte di quella rappresentazione della realta' mediante la matematica che ormai beviamo come l'aperitivo; ma ci sono voluti cervelloni monumentali per ottenere i risultati che oggi ci sembrano un giochettino; ora possediamo tutta questa teoria che ci permette di leggere la realta', e uno dei criteri piu' importanti ma piu' semplici e'

questo della proporzionalita': sappiamo lavorare coi numeri razionali, quindi riduciamo la proporzionalita' a uguaglianza di rapporti. Euclide scrive un intero libro degli Elementi in cui deve fare discorsi estremamente sottili perche' ci sono coppie di grandezze incommensurabili, i cui rapporti non sono rappresentabili in quel modo, ma devono essere rappresentati con numeri irrazionali. Noi dimentichiamo questo, perche' non fa parte del programma, teniamo conto solo dei numeri razionali, i quali del resto sono quelli che ci forniscono nella pratica le operazioni le informazioni e le strutture teoriche possibili per operare sulla realta' materiale, Euclide ci mette un intero libro (lo storico della matematica Proclo che scrive circa sei secoli dopo dice che Euclide ha ereditato questo da Eudosso di Cnido: ancora piu' meravigliosa la situazione se si pensa che una civilta' come quella greca aveva dei cervelli di questo tipo, capaci di queste finezze): il solo fatto dell'acrobazia di lavorare sempre solo col multiplo... La prima operazione che fa Euclide nel libro I dei suoi Elementi e' dividere un segmento in due parti uguali; su un segmento si puo' fare, ma su un'altra grandezza qualsiasi non si puo' fare. Noi l'accettiamo e facciamo la teoria delle proporzioni, che viene ingoiata liscia come un olio, perche' se invece di leggere questa uguaglianza come la rappresentazione di una grandezza in una certa unita' di misura leggiamo la stessa cosa come rapporto tra due grandezze abbiamo un simbolo che ci permette di uguagliare i due rapporti. Non vorrei ulteriormente complicare le cose perche' sono di una semplicita' esemplare. Per ora fermiamoci qui, casomai ridiscuteremo.

6 maggio 1991
XIII incontro col prof.Manara

(appunti non rivisti dall'Autore)

-Enrica Ancora sulle marche: dove e come usarle? Il prof. che tiene il corso di aggiornamento alla mia scuola ha detto: se devo sommare due caramelle e tre caramelle posso scrivere:

2+3=5 (sono caramelle); oppure:
(2+3) caramelle = 5 caramelle; ma non:
2+3 = 5 caramelle

Inoltre: sempre nel corso di aggiornamento alla mia scuola hanno presentato la moltiplicazione come somma ripetuta e basta. Nella soluzione pratica di alcuni problemi ad es. sulle aree incappiamo pero' in difficolta'; o anche nei problemi tipo lire e sacca. Volevo chiarimenti sul fatto che concependo la moltiplicazione come somma ripetuta si dissimmetrizzano i fattori.

-prof.M. Ho riletto l'articolo di Brusotti di cui vi parlavo; dice le cose che ha appena detto lei: o si premette a qualunque discorso ad es. "tutti i numeri qui sono caramelle"; oppure se si mettono le marche ai singoli fattori bisogna salvare l'algebra e cioe' bisogna dire ad es. 50 sacchi x 2000 lire/sacco fa 50 x 2000 lire (sacchi e sacchi si semplificano); oppure bisogna mettere tra parentesi immaginando di aver fatto prima questa operazione algebrica.

-Enrica Ma ai bambini che cosa diciamo? non possiamo fare un discorso algebrico.

-prof.M. Cominciamo a metterci d'accordo noi. Mettere le parentesi prima della marca del risultato significa aver fatto prima l'operazione concettuale, es. sacchi per lire al sacco fa lire, quindi 50 sacchi x 2000 lire/sacco = 100000 lire; se fanno il ragionamento prima a mente, verbalmente, possono scrivere:
L(50 x 2000)=L 100000, dove si dovrebbe capire che la marca si riferisce a tutto cio' che e' tra parentesi.
Per l'area: 10m x 20m = 200m^2 si potrebbe scrivere:
(10x20)m^2 = 200m^2, e si sa che la marca si riferisce a tutto cio' che c'e' tra parentesi, la parentesi ci salva dall'attribuire la marca solo all'ultimo fattore.
Peano se la prendeva con le operazioni scritte cosi': 5+3=8+2=10 e proponeva di mettere anche solo una parentesi chiusa: 5+3=8)+2=10
In questo come nel caso precedente sono solo convenzioni di scrittura da salvare , non c'e' nulla di concettuale o di necessario.
Quanto alla moltiplicazione, se vedo la moltiplicazione come somma ripetuta, perdo la proprieta' commutativa, cioe' perdo una delle proprieta' formali dell'operazione: e' il caso di cui abbiamo detto, il I fattore ha la marca, il II e' un numero di volte. Non solo, ma si blocca la soluzione dei problemi inversi, perche' si e' indotti ad introdurre falsi personaggi come la divisione di ripartizione e di contenenza.
Mettiamoci dal punto di vista dei numeri astratti, cioe' che non rappresentano grandezze, non nascono da operazioni di misura; per i numeri astratti la proprieta' fondamentale e' la proprieta'

commutativa che a mio parere viene salvata e anche vista -perche' io me l'immagino- con l'insieme prodotto cartesiano, cioe' con tutti gli accoppiamenti possibili degli elementi di un insieme con quelli dell'altro; con questo prodotto cartesiano, che si puo' mettere per righe o per colonne, vien fuori una tavola, che e' pressapoco la tavola pitagorica, anche se rettangolare, e mi fa vedere la proprieta' commutativa, perche' io posso sommare per colonne o per righe, e quindi l'addizione ripetuta la posso vedere, ma in due modi, e salvo la proprieta' commutativa; non solo, ma salvo anche la proprieta' distributiva del prodotto rispetto alla somma. Mi pare che la Sig. Davoli avesse fatto qualche esperimento..... (chiedere alle maestre)
Ad ogni modo se fosse possibile vorrei separare l'aspetto concettuale dall'aspetto esecutivo, che posso realizzare anche con le macchinette o con il pallottoliere ... Ci sono delle cose fondamentali, che sono i teoremi: ad es. per la valutazione dell'area di un rettangolo, il teorema di geometria dice che due rettangoli che hanno un lato uguale hanno le aree proporzionali al lato residuo; da qui nasce la regola di moltiplicare tra di loro le due misure; tuttavia l'aspetto fondamentale e' quello del teorema di geometria, non e' il trucco del calcolo; perche' se io prendessi come unita' di misura delle aree un'altra area qualsiasi, ad es. l'area di un foglio di giornale, che non e' 1 m^2, avrei tutto il diritto di misurare le aree con quella misura li', anche se il calcolo non verrebbe cosi' semplice come quando ho scelto come unita' di misura dell'area il quadrato costruito sull'unita' di misura delle lunghezze.
Ci sono quindi i teoremi, che sono le cose piu' importanti, poi le convenzioni di scelta delle unita' di misura, e infine le modalita' di esecuzione del calcolo concreto coi numeri, che sono l'ultima ruota del carro. I calcoli li posso fare con le macchine, l'importante e' che sappia capire il significato della risposta che la macchina mi da'.

-C.Molteni Ho fatto coi bambini il lavoro sulla circonferenza prendendo spunto da quello che ho imparato qui sul rapporto tra il diametro e la circonferenza, e ottenendo 3+1/7 col filo di lana. Il problema adesso e' questo: nel fare gli esercizi di calcolo della circonferenza, dato che abbiamo visto che non si tratta di 3,14, ma di un numero compreso tra 3,14 e 3,15, utilizziamo ugualmente il 3,14?

-prof.M. Il discorso e' molto interessante perche' si riattacca a tutti i discorsi fatti finora, il cui sunto e' che il valore giusto e' compreso tra 3,14 e 3,15. Non solo, ma se ho bisogno di una maggior precisione posso andare avanti, ne hanno calcolate milioni di cifre dopo il 4. Da quel discorso nasce il senso della possibilita' di utilizzare vari modi di esprimersi: ti piace calcolare con le frazioni? prendi 22/7, sapendo pero' che ti fa sbagliare di circa il 3 per 1000. Non e' il prendere 3,14 o 3,15 o 22/7 che e' piu' o meno giusto; e' sapere qual e' l'ordine di grandezza dell'errore che io commetto. Per i Greci 22/7 era una gran trovata, anche se loro non dicevano che la circonferenza e' 22/7 del diametro, ma che 7 volte la circonferenza e' quasi uguale a 22 volte il diametro; non ragionavano per frazioni, le frazioni le abbiamo introdotte noi molto piu' recentemente. Siccome 22/7 e' un valore approssimato per eccesso, allora 22 volte il diametro e'

maggiore di 7 volte la circonferenza, 21 volte il diametro e' minore. Anche Archimede da' due valori: uno e' 22/7, quello approssimato per eccesso, l'altro e' un numero razionale che e' piu' piccolo ma che ha al num. e al den. dei numeri di 3 o 4 cifre (devo ricontrollare sui libri di storia). Quindi Archimede era molto conscio del fatto che non erano misure giuste.
Anche noi dobbiamo essere coscienti che nessuna di quelle espressioni e'quella giusta; dobbiamo sapere qual e' quella inferiore e quella superiore, e sappiamo migliorare le informazioni quando ne abbiamo bisogno. Quello a cui sono attaccato e' che π non e' 3,14, quello non e' un numero magico. Anche Pascal usava 22/7, pur sapendo benissimo che non era esatto. Se devo misurare la lunghezza della circonvallazione di Milano, mi basta anche il 3, passo piu' passo meno; ma se devo calcolare il peso di una sferetta di quelle d'acciaio per coscinetti a sfera, allora ho bisogno di andare al 100000. Adesso con le macchinette c'e' la possibilita' di verificare velocemente senza annoiare i ragazzi. Se lei invece che col filo di lana andasse col filo di naylon, allora il pezzettino non ci sta esattamente 7 volte, ma ne rimane un altro pezzettino. Allora bisognerebbe tagliar via quel II pezzettino e riportarlo sul settimo, e cosi' via, e si otterrebbe quello che viene chiamato lo sviluppo in frazioni continue:
non 3+1/7, ma 3+1/(7+pezz.), poi 3+1/(7+1/(7+...)) ecc.

Se non abbiamo altre domande o difficolta' (mi ricordo l'inaugurazione dell'anno accademico a Modena, uno studente dalla voce tonante veniva assoldato per gridare ogni tanto: non si capisce! sei poco chiaro, approfondisci! e' il bello della goliardia, il prendere sul serio la scienza ma non gli scienziati), la Sig. Davoli mi ha proposto come tema la famosa <u>geometria delle trasformazioni</u>, che messa li' nei programmi ha provocato crisi e traumi. L'espressione non e' molto felice, come minimo va spiegata, rimessa nel suo ambiente e nella sua eventuale motivazione, in modo da capire che cosa vogliono i programmi e che cosa si puo' spremere da questa richiesta. Sui sussidiari ci sono solo esempi, non sempre chiari e non metodicamente organizzati attorno a un pensiero ispiratore che sostiene e fonda il discorso. Cerchero' di presentare le idee fondamentali in modo che le situazioni didattiche potranno essere discusse dopo.
Il discorso della G.d.T. non e' un nuovo capitolo della geometria, un nuovo contenuto, un nuovo vocabolario, ma e' un modo per vedere la g. mettendo l'accento su alcuni aspetti piuttosto che su certi altri e cercando di guardare all'insegnamento della g. secondo una luce che e' dovuta all'evoluzione del secolo scorso e anche degli anni piu' vicini a noi. E' vedere le cose con un occhio un po' diverso, se vogliamo da un altro punto di vista o con un altro spirito. Purtroppo quello che ho visto sui sussidiari si limita a trattazioni di tipo episodico di cui non si vede il perche'.
Cerchiamo di intenderci anzitutto sulla parola. Trasformazione ha un significato anche nel linguaggio comune, ma qui e' sinonimo di <u>corrispondenza biunivoca</u>. Se guardiamo la proiezione di una diapositiva, e' chiaro che la figura che c'e' nella diapositiva non e' esattamente uguale a quella che viene proiettata: potrei dire che quella che viene proiettata e' la trasformata di questa. Cosi' come la fotografia di una persona non e' sovrapponibile alla faccia della persona, e' la figura trasformata. Quando faccio le

operazioni col pantografo, o anche solo prendo un elastico e fisso i punti, li segno con l'inchiostro, poi lo tiro, non e' piu' uguale a prima, i punti sono piu' distanti che in partenza pero' sono nella stessa successione in modo che io posso ricostruire; cosi' se la maestra disegna un quadrato sulla lavagna, e due bambini hanno il quaderno coi quadretti di diversa dimensione, allora i quadrati dei bambini sono diversi uno dall'altro, posso dire che sono i trasformati l'uno dell'altro.
Abbiamo due fatti importanti: il I e' che quando trasformo una figura stabilisco tra la figura e la sua trasformata una corrispondenza biunivoca, cioe' ogni elemento di una figura corrisponde ad un determinato elemento dell'altra e viceversa.
In questo ordine di idee la trasformazione da' luogo ad una corrispondenza uno a uno, come si dice.
In II luogo trasformazione: non e' piu' la figura di partenza, e' in qualche aspetto diversa, ad es. la fotografia sul passaporto e' la mia faccia rimpicciolita. Se facciamo un bilancio approssimato, diremo: <u>qualcosa si conserva, qualcosa si perde</u>; quando proietto una diapositiva su uno schermo, parlando in termini intuitivi, quello che perdo sono le dimensioni; la diapositiva posso metterla in tasca, lo schermo no. Quando leggo con la lente o con gli occhiali, opero una trasformazione sulle figure che ci sono sulla pagina, cioe' le lettere dell'alfabeto, perche' con i miei occhi non vedo la scrittura, con gli occhiali si'.
Ecco l'idea direttiva del discorso: quando noi trasformiamo una figura, vuol dire che non abbiamo piu' la figura di partenza, come minimo le abbiamo cambiato di posto: la circonferenza e' troppo lontana, la porto qui, cosi' la vedo piu' da vicino; oppure possiamo cambiarne le dimensioni, o addirittura forma e dimensioni; se ci fosse il sole, quell'inferriata avrebbe l'ombra per terra, ma le ombre delle sbarre verticali e orizzontali non sarebbero piu' perpendicolari tra loro, cioe' quei rettangoli determinati dalle sbarre sarebbero trasformati in parallelogrammi; pero' abbiamo sempre una corrispondenza biunivoca tra la figura di partenza e la sua immagine, se vogliamo la sua trasformata, in cui c'e' qualcosa di cambiato e qualcosa che rimane.
L'esempio che abbiamo fatto poco fa della circonferenza che e' lontana ed io la porto vicino e' la prima trasformazione, la piu' semplice, la piu' immediata: e' il <u>trasporto rigido</u> di una figura. Cambio di posto, ma non cambio ne' la forma ne' le dimensioni.
Qualche volta cambia qualche cosa: ad es. se guardo la mia faccia nello specchio, e' in grandezza naturale, ma non riuscirei a portare con un movimento rigido la mia testa dall'altra parte; lo stesso se guardo la mia mano nello specchio, l'immagine della mano destra si puo' sovrapporre alla mano sinistra.
Abbiamo un insieme di trasformazioni che vengono chiamate <u>isometrie</u> che sono trasformazioni della figura che conservano le misure, le lunghezze dei segmenti corrispondenti e le ampiezze degli angoli. Alcune si ottengono con movimenti rigidi, altre con operazioni un po' piu' complicate che sono le simmetrie o specchiamenti. Nella visione originale della geometria degli Elementi di Euclide questa operazione di cambiar di posto alle figure e' considerata come comprensibile, immediata, come un dato di fatto: E. dice: due triangoli sono uguali se possono essere sovrapposti l'uno all'altro. Sovrapposti come? Devo immaginare che siano in qualche modo materializzati in un corpo rigido che non muta ne' la forma ne' le dimensioni quando lo sposto e che quindi

io possa verificare questa relazione di uguaglianza con un trasporto rigido; se i due tr. invece di essere fatti di lamiera o di cartone fossero fatti di pasta di pane, non potrei piu' trasportare un triangolo sull'altro con la garanzia che rimanga qualcosa di uguale anche se qualcosa cambia. Il discorso e' stato ripreso da Poincare' il quale diceva: se noi fossimo in un universo in cui la temperatura cambia da un punto all'altro e noi non avessimo la sensazione del caldo e del freddo e quindi non ci accorgessimo del cambiamento di temperatura da un punto all'altro, trasportando un regolo metallico da una parte all'altra, questo si dilata, ma noi non ce ne accorgiamo, quindi riterremmo uguali i due regoli metallici quando non lo sono.

Questo e' un discorso che facciamo per noi, non per i r., perche' fa parte del patrimonio comune dell'umanita' il concetto di corpo rigido, cioe' di corpo che non muta sensibilmente la forma; si sa che di corpi rigidi non ce ne sono, anche i corpi che sembrano i piu' rigidi di questo mondo li hanno sottoposti a pressioni tali che si deformano; pero' noi abbiamo un certo insieme di esperienze, un certo insieme di forze che sono quelle che possiamo esercitare con i nostri muscoli, non con una pressa da 2000 kg, e allora ci accorgiamo che maneggiando certi corpi essi non cambiano sensibilmente di forma; allora abbiamo un'idea abbastanza chiara del corpo rigido e quindi del cambiamento di posizione di un corpo.

Quindi la g. fino all'inizio del secolo scorso e' stata acriticamente basata sul fatto che ha senso trasportare rigidamente un corpo e quindi una figura geometrica che risulta essere l'idealizzazione di un corpo. Io non lavoro mai sul cubo, lavoro su dei dadi, pero' immagino il dado dimagrito in maniera da darmi la figura geometrica cubo e immagino che si possa trasportarlo senza cambiargli di forma.

Il punto fondamentale di questo discorso si riattacca agli esempi che abbiamo fatto. Quando faccio della geometria, io ritengo automaticamente indifferente la posizione dei suoi oggetti; ho detto: questa circonferenza e' troppo lontana, la porto vicina, pero' sono convinto che le cose che mi interessano non cambiano quando la sposto: mi interessa ad es. misurarne la lunghezza con l'operazione del filo di lana, ecc. L'idea fondamentale che sta alla base di questo discorso e' che le cose che interessano la g. sono le proprieta' delle figure (ovviamente indipendenti dalla costituzione fisica o chimica) che non cambiano, quelle che Klein chiamo' <u>invarianti</u> delle figure. Se prendo una circonferenza e la trasporto, sono convinto che il raggio non cambia.

Quest'idea venne esplicitamente enunciata in un celebre discorso del grande matematico tedesco Felix Klein iu una celebre dissertazione tenuta all'universita' di Erlangen nel 1882, quindi un secolo fa, intitolata: "Considerazioni comparative riguardanti i vari tipi di geometrie". Il "comparative" ve lo spiego tra poco.

Ecco allora che veniamo a guardare lo studio delle figure geometriche dal punto di vista che e' stato posto da Klein: trasformando una figura geometrica abbiamo cose che cambiano e cose che non cambiano; quelle che interessano la g. sono quelle che non cambiano, la g. e' lo studio degli invarianti delle figure rispetto a certe trasformazioni, ecco allora il nome di geometria delle trasformazioni.

Sui libri ci sono tante cose curiose ed interessanti, ma non essenziali a questo discorso; ad es. ci sono le simmetrie del

piano, che possono essere simmetrie rispetto ad un punto o ad una retta; le simmetrie rispetto ad una retta si possono ottenere ribaltando il piano come si fa per la pagina di un libro; quelle rispetto ad un punto, prendendo il piano e facendolo girare di 180 gradi tenendo fisso quel punto. Nello spazio ci sono gli specchiamenti rispetto agli specchi oppure le rotazioni intorno ad un asse: ad es. una bandiera, se il vento cambia di 180 gradi ottengo una figura che e' simmetrica della precedente rispetto ad una trasf. che e' la rotazione intorno ad un asse. Oppure c'e' la simmetria rispetto ad un punto, tra noi e gli antipodi sula terra c'e' una simmetria, perche' noi siamo in piedi qui e ci sono degli esseri umani che sono dall'altra parte del mondo congiungendo col centro della terra e che stanno coi piedi nella direzione in cui noi abbiamo la testa e viceversa.
Nei libri ci sono anche esempi molto interessanti di come si possono generare queste trasf.: cosi' si puo' far vedere che tutti i movimenti rigidi di un piano li posso ottenere con ribaltamenti, e questo magari per i ragazzi e' abbastanza interessante. Per es. se ho un triangolo equilatero, ci sono tre assi di simmetria, e allora i movimenti di questa figura sono dati o dalla rotazione di 120 gradi e di 240 gradi intorno al centro, o dai ribaltamenti intorno alle tre altezze; e coi ribaltamenti si puo' costruire qualunque rotazione. E' un'analisi interessante dei movimenti decomposti nei loro elementi. Qui il discorso veramente importante, che nei libri non c'e', non e' tanto che ogni movimento rigido del piano puo' essere ottenuto con ribaltamenti, ma la decomposizione di una certa operazione in operazioni elementari, questa e' l'idea fondamentale, perche' se devo cercare degli invarianti li cerco per delle operazioni elementari, e qualunque operazione per quanto complicata sia mantiene sempre quelle proprieta'.
Questo discorso sulle simmetrie, che e' conseguente a quello sulle trasformazioni, perche' le simmetrie sono particolari trasformazioni, ha poi avuto tutta una quantita' di estensioni: il fisico P.Curie scrisse un celebre saggio sulla simmetria fisica, dando delle leggi generali sulle simmetrie dello spazio e delle forze. Il discorso partito dalla g. ad opera di Klein e' diventato un discorso riguardante anche la fisica. Oggi poi i fisici teorici parlano di simmetria in sensi molto piu' estesi.
Con simmetrie si riesce a costruire qualunque tipo di isometria. Questo interessa per lo studio degli invarianti, se ho decomposto in singoli mattoni, poi vado a studiare l'effetto di ogni mattone. Era l'idea del prof. Chisini, decomporre in trasformazioni elementari, allora certi teoremi che comportavano calcoli lunghissimi lui li dimostrava senza bisogno di carta e matita andando a spasso.
Allora il discorso delle trasf. ha un senso, perche' le cose che si conservano sono poi quelle che mi interessano, e allora le informazioni che mi interessano di una figura le posso trarre dalla figura trasformata, purche' si tratti di invarianti. Ad es. π e' il rapporto tra la lunghezza della circonf. e quella del diametro, sia una ruota di carro, sia una fontana di 10 m di diametro, sia l'intera terra, sia una biglia, ciascuna di queste figure si puo' vedere come trasformata l'una dell'altra con una dilatazione, sempre il rapporto e' quello; quindi le informazioni le prendo dalla biglia e le trasferisco alla terra. Perche' facciamo la fotografia? perche' da essa riconosciamo il tizio che

ci viene incontro, i rapporti tra i punti fondamentali del viso vengono mantenuti. Perche' posso fare le proiezioni? la figura proiettata e' molto piu' grossa della diapositiva, ma i rapporti tra le varie parti sono mantenuti.
In sostanza la trasf. -e qui usiamo un concetto incontrato gia' in altro ambito- costruisce la classe di equivalenza di figure, in modo che le cose che veramente mi interessano per la g. sono quelle che appartengono a tutte le figure della medesima classe di equivalenza. Questo e' il sugo del discorso della g. delle t., e mi pare che non ci sia niente di nuovo nei contenuti, semplicemente noi dopo Klein abbiamo preso coscienza di questi fatti che una volta davamo automaticamente per scontati.
Ma il prendere coscienza ci permette anche di ampliare il nostro modo di vedere, ed e' qui che questa impostazione mostra molte delle sue possibilita', perche' aiuta a guardare piu' avanti, a generalizzare, a guardare piu' a fondo nelle cose. Se ci fosse il sole, quell'inferriata avrebbe un'ombra sul pavimento in cui i rettangoli sarebbero dei parallelogrammi, e se io volessi contare il numero di nodi, cioe' di intersezioni tra le sbarre verticali e le sbarre orizzontali, quel numero sarebbe lo stesso tanto nell'inferriata che nell'ombra; i rettangoli sono stati deformati, pero' c'e' qualcosa che rimane, che e' il numero di intersezioni. L'operazione di trasformazione che fa corrispondere all'inferriata la sua ombra non e' un movimento rigido, e' un'operazione piu' generale, la quale tuttavia ha certi invarianti, che non sono piu' quelli della geometria elementare ma sono quelli della geometria proiettiva. Ecco da dove viene il significato del titolo della celebre dissertazione di Klein: "Considerazioni comparative....": lui comparava le varie procedure, i vari tipi di geometria che si conoscevano a quell'epoca, e verificava che in ogni caso, anche se le trasformazioni erano diverse da un caso all'altro, perche' la proiezione di un'ombra non e' un movimento rigido, pero' c'e' qualche cosa che rimane lo stesso. Perche' ripeto riconosco una fotografia? perche' c'e' qualche cosa che rimane, tant'e' vero che oggi si viene a studiare la geometria proiettiva perche' ci sono degli invarianti fondamentali per proiezione del viso umano (i rapporti tra le soppraccilia, gli occhi, la forma del viso) che si potrebbero codificare per es. e scrivere come le impronte digitali, e l'analisi delle fotografie si potrebbe fare a macchina.
Quindi questo nuovo modo di vedere la vecchia geometria ha portato anche ad ampliare il concetto della geometria, cioe' addirittura a guardare alla geometria proiettiva, cioe' alla geometria in cui le trasformazioni non sono solo dei movimenti rigidi, ma sono anche delle proiezioni. Il caso piu' clamoroso e' quello delle celebri curve che vengono chiamate coniche o sezioni del cono. Se ho un cono rotondo, quando lo taglio con un piano perpendicolare all'asse viene una circonferenza, con un piano obliquo viene un'ellisse: e' una curva che si ottiene proiettando una circonferenza. Ecco allora che noi abbiamo un ambito piu' vasto di trasformazioni, le quali pero' hanno anche loro i loro invarianti; e quindi la geometria proiettiva risulta essere una geometria piu' generale della geomatria elementare nel senso che studia gli invarianti delle figure per trasformazioni che sono piu' generali dei movimenti rigidi o delle similitudini, che sono quelle tipiche della geometrie euclidea.
Pero ', dato che l'appetito vien mangiando, si puo' ampliare

ulteriormente questo discorso: considerare non solo le trasformazioni che sono date da movimenti rigidi o da similitudini, non solo quelle che sono date da proiezioni, ma anche altre ancora piu' generali che sono le cosiddette trasformazioni per continuita' , quelle che vengono chiamate gli omeomorfismi: anche queste hanno certi invarianti, che sono gli invarianti della topologia. In molta letteratura destinata ai maestri elementari il nome di topologia purtroppo viene dato ad un insieme di nozioni molto ristrette che non sono quelle della matematica , perche' facendo leva sul significato etimologico (topos in greco vuol dire luogo) molti pedagogisti chiamano topologia la nozione che un soggetto ha della propria relazione con gli oggetti che lo circondano, quindi questa gente attribuisce alla topologia le nozioni di localizzazione (destra, sinistra, avanti, dietro, alto, basso). Naturalmente nessuno e' proprietario di una parola, nessuno puo' dire ad un altro: tu non la devi usare in questo senso. Pazienza. Ma nell'uso abituale della matematica topologia e' lo studio delle proprieta' delle figure invarianti per trasformazioni continue: caso tipico, immaginiamo un cubo, un dado di gomma, che ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli; immaginiamo di gonfiarlo, allora lo facciamo diventare una sfera; immaginiamo che le saldature delle facce rimangano, ecco che la sfera non ha piu' la forma di un cubo, non e' piu' limitata da facce piane, pero' le saldature rimangono, i pezzi di stoffa sono sempre 6, 8 i vertici, cioe' gli incroci di tre saldature due a due, e 12 gli spigoli. Se prendiamo un qualunque poliedro regolare, o anche non regolare, possiamo distinguere facce vertici spigoli; se lo deformiamo, lo immaginiamo fatto di pasta di pane o do gomma, resta pero' sempre il numero dei vertici, delle facce e degli spigoli, e c'e' un celebre teorema di Eulero, uno dei primi teoremi di topologia, che dice che il numero dei vertici piu' il numero delle facce e' uguale al numero degli spigoli piu' due.
Se loro prendono il pallone da football, che ha facce bianche a forma di esagoni e nere a forma di pentagoni, ha 32 facce mi pare, e vale sempre il teorema di Eulero, anche se si sgonfia. Allora noi abbiamo un'altra serie di invarianti, cioe' di proprieta' che non cambiano ne' con lo spostamento ne' con la deformazione, purche' non si laceri, e che sono attinenti a questo ramo della geometria che e' la topologia.
Un altro caso estremamente interessante e' quello degli annodamenti, la teoria dei nodi. Se ho due circuiti che si annodano, qualunque sia la forma che do'loro, restano sempre annodati; oppure il caso dei tre anelli che possono essere annodati a due a due, oppure possono essere annodati soltanto tre a tre: a due a due slegati, e invece annodati dal terzo, gli anelli borromaici cosiddetti. Ecco allora che si comincia dal dire: sposto la figura, tanto mi viene piu' vicina ma le cose che mi interessano non cambiano, e si arriva fino a proprieta' estremamente importanti e generali che sono quelle della topologia. Tutto questo e' detto in poche parole in quella frase misteriosa della geometria delle trasformazioni.
Allora per concludere si parte dal discorso che fa perno sull'esistenza di cose che non cambiano, gli invarianti, di cose che cambiano mediante certe operazioni che sono le trasformazioni, di possibilita' di avere diverse trasformazioni, cioe' diversi modi di avere cose che cambiano e cose che non cambiano. Non ci sono cose nuove, ma un nuovo modo di guardarle, che io spero che i

ragazzini afferrino quando l'attenzione sia diretta in quella direzione. Non penso che un ragazzino davanti ad un pezzo di cartoncino si ponga la domanda: ma se lo trasporto cambia? Questa e' una domanda critica che la storia umana non per nulla e' stata 20 secoli senza porsi, pur essendoci stati matematici di altissimo livello; anche noi quindi siamo scusati se non ce li poniamo subito. Io direi che non bisogna introdurre dubbi nelle anime serene.
Quindi, una luce nuova sotto cui guardiamo le cose vecchie. Se vogliamo poi parlare di movimenti, ribaltamenti ecc., i ragazzi si divertono,perche' l'attenzione e' spostata sulla manipolazione degli oggetti, pero' a noi interessa attirare la loro attenzione su questi concetti fondamentali: guarda che tu lo ribalti e lo rigiri ma le misure rimangono le stesse, oppure viceversa se vuoi avere informazioni lo porti vicino perche' sei sicuro che...ecc.
Questa nuova luce non si ferma agli episodi (sui libri ce ne sono di molto interessanti, che attirano l'attenzione), perche' i fatti fondamentali non si limitano a queste cose (movimenti del quadrato, ecc.), ma vanno piu' a fondo, a un modo nuovo di vedere le nostre manipolazioni sugli oggetti. Regolarmente noi manipoliamo degli oggetti, lo facciamo in biologia, in chimica, lo facciamo in ogni caso, quando faccio un'analisi di un elemento chimico presumo che ci sia qualcosa che rimanga, quando faccio l'analisi dell'acqua di un pozzo ne prendo una bottiglietta, cioe' un campione, cioe' stabilisco una classe di equivalenza tra le possibili estrazioni di acqua. Nel caso della geometria le trasformazioni ci danno le classi di equivalenza delle figure, a seconda del modo in cui noi costruiamo con trasformazioni le classi di equivalenza vengono fuori la varie geometrie, cioe' allarghiamo il nostro modo di vedere, la nostra conoscenza razionale degli oggetti che ci circondano, tenendo presente non solo le manipolazioni sugli oggetti rigidi, ma anche manipolazioni molto piu' generali, come le fotografie, ecc. Come si fanno le carte geografiche? Una volta si mandavano i topografi, i rilevatori sul posto: nelle vecchie carte dell'Istituto geografico militare c'e' scritto: capitano Tal dei Tali, andava proprio sul posto con la tavolettta. Prima dei satelliti si andava in areoplano, si faceva una strisciata di fotografia, che poi doveva essere ricostruita, perche' in laboratorio non si andava con la terra, c'erano delle immagini, bisogna che le informazioni che noi chiediamo alle immagini siano tali da darci le informazioni giuste sull'oggetto.
Quindi, attirarare l'attenzione e' un conto, fare dei capitoli apposta e' un altro.

20 maggio 1991
XIV incontro col prof.Manara

(appunti non rivisti dall'Autore)

-L. Chiesa Lei l'altra volta ha parlato di simmetrie come ribaltamenti: esco anche dal piano?

-prof.M. Le simmetrie entrano nel grande pentolone delle isometrie, cioe' delle corrispondenze che salvano le distanze e gli angoli. Il discorso dei ribaltamenti o dei movimenti rigidi si riferisce al modo per ottenere la corrispondenza che e' l'isometria: io potrei pensare alla corrispondenza sic et simpliciter senza pensare alla procedura per ottenerla; se poi oltre alla corrispondenza che conserva gli angoli e le distanze io penso alla procedura, cioe' all'operazione che, data una figura, mi permette di costruire la sua corrispondente isometrica, allora c'e' la distinzione tra movimento e ribaltamento, cioe' tra movimento e simmetria, perche' alcune isometrie si possono ottenere con movimenti rigidi e quindi rimanendo nello spazio in cui si lavora (piano o spazio abituale), invece esistono isometrie tali che la corrispondenza tra la figura e la sua corrispondente, se la voglio vedere come operazione, deve essere eseguita uscendo dallo spazio. Allora se siamo nel piano, devo uscire dal piano; se siamo nello spazio tridimensionale, i casi sono due: i geometri inventano la quarta dimensione, oppure si dice: non si puo' ottenere. Quindi la simmetria rispetto ad un piano nello spazio non si puo' ottenere con movimenti rigidi rimanendo nello spazio.
Quella invece rispetto ad una retta si ottiene facendo ruotare tutto lo spazio di 180 gradi intorno allla retta.
Quindi c'e' la distinzione tra il concetto e la procedura.
C'e' una bellisima novella di Cechov sul tizio che era rimasto con due stivali sinistri.....

-Enrica Il discorso dell'ultima volta mi e' stato molto utile...

-prof.M. Se i miei illustri colleghi invece di parlare di trasformazione avessero parlato di corrispondenza, sarebbe stato molto piu' facile fare il discorso ai ragazzini: tu perche' riconosci la fotografia della mamma? perche' resta qualcosa che corrisponde a quello che tu vedi. Perche' usiamo la carta geografica? perche' c'e' una corrispondenza tra la posizione delle case sulla terra e sulla carta che ci permette di assumere informazioni, naturalmente non tutte, perche' sono conservati i rapporti. Invece, dire geometria delle trasformazioni, a parte l'espressione infelice che fa pensare ad una nuova specie di geometria, concentra l'attenzione sull'operazione che ottiene questa corrispondenza. Ora, io posso benissimo non pensare alla trasformazione in quanto operazione geometrica, ma posso pensare alla corrispondenza e al salvare certe cose, che sono quelle che mi danno le informazioni che io desidero, come quando guardo la carta geografica. In sostanza, quando gli insegnamo ad usare la carta geografica, gli insegnamo la teoria delle trasformazioni.
I ragazzini hanno un vocabolario molto ristretto e bisogna allargarglielo pian pianino; si trovano invece di fronte ai sussidiari, che spesso sono fatti da persone non dotate di cultura

matematica, e senza l'entroterra culturale del programma di Erlangen, dell'evoluzione della geometria del secolo scorso che oggi ci fa impostare il discorso della g. in questo modo. Se uno non ha questo retroterra culturale, si studia un po' di testi di g. e fa un po' di trasformazioni: le simmetrie, le rotazioni ecc., senza dare la motivazione, senza leggere nel quotidiano quello che noi utilizziamo concretamente tutti i giorni. Quando ci guardiamo allo specchio per farci la barba, noi prendiamo informazioni non dalla nostra faccia ma dallo specchio. Quando guardiamo una fotografia, una carta geografica, una piantina, sono sempre trasformazioni.

......

La gente priva di cultura e' incapace di riconoscere nelle nostre operazioni quotidiane una certa struttura logica e culturale, e quindi di partire da li' per costruire. Il discorso a mio parere piu' profondo e' che pian piano anche la matematica sposta la sua attenzione dagli oggetti alle nostre operazioni sugli oggetti. E' il discorso dell'algebra: quando e' nata l'algebra gli inventori dell'algebra moderna, con Cardano e Tartaglia, non e' che si rendessero molto conto. Cosi' il discorso della geometria: piuttosto che sulle figure in quanto tali, magari sullo spazio, si sposta sulle operazioni che noi eseguiamo su di esse. Quando io dico: sono nello spazio euclideo, vuol dire che io accetto di operare sulle figure con le trasformazioni che sono i movimenti rigidi. Quando io dico: mi metto nello spazio proiettivo, non e' che cambi lo spazio, vuol dire che io accetto di trasformare le figure con operazioni di proiezione, come il discorso sull'ombra che abbiamo fatto. Quando mi metto in uno spazio di Riemann, come dicono i fisici per la relativita' generale, io accetto di fare sugli eventi fisici certe operazioni, ovvero considero equivalenti certi eventi fisici che sembrano diversi tra di loro. Questo e' il senso del discorso. Se la gente non lo capisce, e' perche' glielo metti in un modo per cui non possa capire, perche' non fai emergere dalla realta' quotidiana del nostro modo di vedere le cose la struttura teorica facendone vedere la presa sulla realta' e la capacita' unificante.

E' il discorso dell'insiemistica: perche' dare un vocabolario complicato e astratto, che rimarra' sempre astratto se non lo faccio attaccare a cose concrete? Andate a domandarlo ai professori universitari che fanno i programmi, che dicono: non si puo' fare a meno di questo, di quest'altro, ecc.

Altro capitolo tragico, quello del Calcolo delle Probabilita', che viene cosi' ridotto ai giocarelli con le palline e le urne, mentre tutti i giorni dobbiamo prendere decisioni in condizioni di informazione incompleta che genera l'incertezza (quindi non : "matematica dell'incertezza", ma: matematica delle decisioni in condizioni di informazione incompleta, che genera l'incertezza; l'incertezza infatti e' una condizione psicologica, l'informazione no, e' una cosa che tu misuri), e quindi tutti i giorni dobbiamo valutare delle convenienze tra il fare e il non fare; e il C. delle P. non e' altro che la razionalizzazione in base a determinati principi logici abbastanza generali e intelligenti di questo nostro comportamento quotidiano, quando vuol essere ragionevole. Noi siamo certi che domani sorgera' il sole perche' abbiamo nozioni astronomiche tali da avere informazioni precise anche sull'ora, minuti e secondi di quando sorgera' il sole; se fossimo pigmei o aborigeni dell'Australia, anche l'eclisse sarebbe

per noi un evento incerto. Invece per il tempo meteorologico di domani, dal momento che le equazioni che danno l'andamento dell'atmosfera sono terribilmente complicate, non abbiamo informazioni sufficienti e dobbiamo solo dare delle valutazioni di probabilita'. Ma questo non c'entra con la certezza e l'incertezza: possiamo essere certi che domani sara' brutto tempo per via dei reumatismi, sono tutte informazioni che abbiamo.
Quelli che scrivono i capitoli di C. delle P. sui sussidiari, non avendo capito che cos'e' la probabilita', la riducono a giocarelli con le palline. Come quelli che non hanno digerito l'atteggiamento della geometria riducono la g. delle trasformazioni alle simmetrie; mentre questo e' solo un sottocapitolo in cui si studia come si possono generare tutti i movimenti rigidi, cioe' tutte le operazioni di isometria. Che ogni movimento rigido del piano io lo possa generare con tre simmetrie, e' un teorema interessante, ma non e' pertinente al concetto di trasformazione che e' quello importante, perche' la trasformazione vuol dire costruire una corrispondenza, un modello, qualcosa che ci dia l'informazione. Una carta geografica e' un modello di un pezzo di superficie terrestre, modello che ci serve poi per avere informazioni.
La matematica e' buonsenso, ma chi non l'ha capita ne fa una magia.

-E.Zago Insegnando matematica ai ragazzi della scuola superiore e passando poi all'insegnamento della fisica ci si rende conto di come si debba educare i ragazzi all'invariante, e si sente l'esigenza di fare dei collegamenti, di riimpostare la stessa geometria, che all'inizio e' pura lettura del libro (soggetto, verbo, complemento) e poi potrebbe diventare qualcosa di piu'.

-prof.M. Questo discorso dell'invariante collegato alla fisica e' molto importante, si riattacca alla relativita' di Galileo e alla rel. di Eistein.
Il mio amico Farias a Bolzano quando dirigeva l'istituto professionale aveva comprato dei bellissimi filmetti super-8 in Germania in cui c'erano esperimenti di fisica; in uno, sulla relativita' del moto, si vedevano due carrelli: una volta quello di sinistra stava fermo e quello di destra gli andava incontro, l'altra volta viceversa, e il problema era dire quale stava fermo e quale si muoveva, con il commento da fare, perche' se io mi metto nell'ambito puramente cinematico non ha senso domandarsi chi sta fermo e che si muove, dipende da dove sta l'osservatore. Se uno osservava bene, vedeva le ruotine di uno dei carrelli che giravano e le altre no; pero' l'esperimento era fatto in modo tale che sembrava che anche quello che stava fermo si muovesse. Altri esempi , di films americani, erano fatti con corpi che si muovevano sul tavolo perche' c'era dell'anidride carbonica solida; se uno non aveva il riferimento, non poteva dire quale si muovesse e quale no. Allora, partendo dalla relativita' del moto, si puo' fare il discorso del concetto di invarianza, cioe' quale senso ha fare l'osservazione e che cosa possiamo dire; l'invariante vero e proprio e' il cambiamento della distanza tra i due corpi; il fatto che uno si muova o no e' l'oggetto misterioso (noi abbiamo tutta una quantita' di informazioni di cui teniamo conto senza riconoscerlo esplicitamente, ma il cui significato riconosciamo quando ci mancano, come l'oggetto misterioso; v. "Il nostro agente all'Avana", dove il tizio costretto a fare spionaggio industriale

mandava ingrandimenti fotografici di pezzi di aspirapolvere).
V. anche Galileo, quella pagina classica in cui spiega come un osservatore all'interno di una nave non puo' capire se la nave si muova perche' le mosche continuano a girare senza addensarsi sia che la nave si muova sia che non si muova. Allora, si potrebbe dire che lo stato di moto o di quiete delle api rispetto al naviglio e' invariante rispetto ai movimenti, alle trasformazioni che il moto porta. O come quando si e' in treno e per pochi istanti non si sa se e' il nostro treno che si muove o l'altro; e' un discorso che si riattacca a quello degli invarianti, la sola cosa invariante e' il cambiamento di posizione relativa; se vogliamo dar senso a chi si muove e chi sta fermo, dobbiamo ricorrere a riferimenti dinamici, le scosse, i rumori, o riferimenti esterni come la stazione.
Sono discorsi che utilizziamo tutti i giorni, non e' una cosa misteriosa, anche e soprattutto nella fisica: i grandi principi dell'invarianza dell'energia, della quantita' di moto ecc., dovrebbero essere messi prima, perche' sono quelli che aiutano a inquadrare tutti i fenomeni; quando uno poi vuol risolvere un problema fisico deve tornare indietro e inquadrarlo nelle grandi leggi.
Mi ricordero' sempre le leggi di Kirchoff sui circuiti, presentate in un'intera pagina in modo complicatissimo, quando poi il prof.Bottani del Politecnico in una conferenza alla Mathesis ha detto che la legge di Kirchoff significa semplicemente che in un nodo non si accumula elettricita', tanto ne entra tanto ne esce; finalmente ho capito il senso di tutte quelle equazioni.
Il discorso sull'invarianza direi e' piu' fisico che geometrico; purtroppo nei libri dedicati ai licei classici e scientifici queste cose non si trovano. La relativita' eisteiniana ad es. e' tutta il discorso di Klein sul programma di Erlangen, e' la traduzione in fisica della geometria delle trasformazioni; trasferire le mie osservazioni della natura in quelle di un altro osservatore e' una trasformazione di coordinate, e allora la rel. eist. e' quella che cerca gli invarianti delle leggi al disotto delle trasformazioni di coordinate che in questo caso sono date dai diversi osservatori. Quando e' messa cosi', si capisce che il pensiero di Klein filtrato attraverso la scuola italiana di Ricci Curbastro dei differenzialisti italiani e' stata trasferita nel cervello di Einstein. La genealogia di queste idee a mio parere e' geometrica, tant'e' vero che per scrivere la relativita' generale ha adottato le notazioni del calcolo tensoriale che erano state create per problemi di geometria differenziale.

-A.Nava Io insegno in una II elementere e vedo come i bambini spesso si fanno delle idee proprie rispetto alla forma degli oggetti che hanno davanti, e quindi e' importante fin dall'inizio della scuola abituarli a riflettere su queste proprieta' che non cambiano. Pochi giorni fa un bambino ha portato a scuola due squadre; i suoi compagni sostenevano che una era di forma triangolare, ma l'altra no. Allora ho cominciato a chiedere quali erano le caratteristiche per cui una certa figura poteva essere chiamata triangolo, e i bambini si sono mobilitati a rispondere. Io ho preso lo spunto per disegnare alla lavagna una gran quantita' di triangoli di forme dimensioni posizioni diverse.
I bambini hanno grosse potenzialita' che possono usare nel lavoro quotidiano. Ad es. dovendo far disegnare la pianta dell'aula ho

chiesto loro di immaginare di guardarla da un soffitto di vetro; i banchi allora sono dei rettangoli, ma un b. diceva che il suo banco era quadrato. Allora altri gli si sono avvicinati, uno ha usato i centimetri del righello, un altro ha usato il righello come unita' di misura, e gli diceva: guarda, questo lato misura due righelli, l'altro tre ...

-prof.M. Lei ha fatto una lezione di logica senza dirlo perche' ha richiamato la definizione, cioe' le cose essenziali della figura, e poi ha domandato a loro di precisarle e di verificare se una certa figura corrisponde a quella def. oppure no; cioe' ha fatto un discorso di logica, applicata beninteso.
Io sono contrario all'abolizione della geometria perche' sono proprio le figure essenziali, i concetti piu' elementari e visibili che permettono questi esercizi. E' un rettangolo; no, e' un quadrato, dice l'altro. Beh, vediamo; che cosa vuol dire un quadrato? vuol dire che ha i lati uguali; ma anche se e' disegnato cosi'? non importa, basta che abbia i lati uguali; allora vediamo, col righello, con il metro, o con un pezzo di spago. Cosi' si fanno venir fuori proprio le procedure della logica, l'invarianza, perche' uno dice: se lo giro, e' un rettangolo ancora? Prendiamo un pezzo di spago, vediamo se e' un rettangolo o un quadrato: movimento rigido, definizione di rettangolo, risponde o non risponde? Questa e' logica praticata, quando si fanno ragionare i ragazzini; non solo, ma ci arrivano loro. L'unica cosa in piu' potrebbe essere far riflettere: perche' hai detto cosi'? perche' hai detto che questo non e' un quadrato?
Non e' necessario che nei programmi ci siano queste cose: basta che l'insegnante, che possiede la materia, trovi il momento giusto per rendere esplicite, o riflesse, o ragionate, quelle cose che verrebbero spontanee.
Occorre anche non insistere nel lasciare andare i r. senza cavezza: pur senza mortificare la creativita', bisogna che l'insegnante trovi il momento di tirare le briglie e di far nascere la razionalita' da quella che puo' essere l'inventiva; l'insegnamento elementare e' proprio questo: abituarli pian pianino ad arricchire il lessico, dato che molte difficolta' dei b. sono dovute alla poverta' del lessico (magari hanno visto un solo triangolo, e per loro quello e' il triangolo); allora l'insegnante giustamente fa l'operazione logica di risalire alla definizione e di verificare che quella stessa definizione puo' essere ubbidita anche da altre figure che non sono quelle della sua esperienza. Ecco che allora pian pianino da una parte si arricchisce il lessico, dall'altra si arricchisce l'idea, cioe' il contenuto di enti particolari che entrano in una determinata idea.
Le cose entrano saldamente nelle teste se vengono messe in un modo che e' pertinente al problema che nasce in esse e alla loro esperienza. Come quando il prof. Bottani mi ha detto quell'interpretazione cosi' ovvia dei principi di Kirchoff, che erano rimasti per me un sistema di equazioni che sapevo a memoria, e da allora ho inquadrato un certo discorso di carattere fisico. Tante volte ci capitano cose di questo genere; mi ricordo una volta il mio maestro (un uomo straordinario come inventiva), si parlava di un certo problema termodinamico, e lui disse: -Le molecole di un gas sono tutte grosse uguali. -Come, grosse uguali? -Si', e' la legge di Avogadro. -Ma la legge di Avogadro dice: volumi uguali di gas alla medesima temperatura contengono lo

stesso numero di molecole. Ah si', allora sono grosse uguali, non ci avevo mai pensato! Ma sui libri di chimica non c'e' scritto. -E' perche' i chimici non sanno la chimica.

-Rosita E' capitato anche a me con i miei ragazzi quando erano in II, che facessero confronti su queste figure e discussioni molto accanite, addirittura uno diceva: triangolo vuol dire tre punte, ma questa e' una punta larga, l'altra e' stretta; cioe' confrontavano gli angoli, e capivano che rimaneva un triangolo anche se aveva angoli diversi da un altro...

-prof.M. E' il discorso sulla definizione fatto prima; noi diamo delle def. verbali, ad un bel momento bisogna educare a riconoscere nei singoli casi che sembrano diversi la rispondenza all'essenza, oppure, dato il caso particolare, dobbiamo trovare il modo (ma forse questo e' piu' difficile) che loro dicano le condizioni essenziali in maniera che sia definito non un singolo oggetto ma la classe di equivalenza. In questo ripeto per me la geometria e' estremamente educativa, perche' ha a che fare con oggetti talmente semplici e visibili che costituisce una palestra molto utile per questo lavoro che e' di linguistica e di logica, nemmeno di geometria; naturalmente se prendiamo la geometria e ne facciamo un cumulo di denominazioni, di parole complicate, invece di far esercitare i ragazzi in questo modo, in cui i problemi nascono da loro, dalle loro discussioni, e' chiaro che facciamo poi una cosa distaccata dalla realta', una cosa che loro dimenticano, ma la colpa non e' loro (digressione sull'esame in cui l'esaminanda non conosceva non solo la distinzione tra insiemi finiti e infiniti, ma nemmeno i nomi dei nani di Biancaneve).

-Enrica ...... e' difficile per me precisare i passi da fare in geometria (piu' che in logica, aritmetica ecc.) perche' tutto e' permeato da un contesto molto ampio, prevalentemente linguistico o di altre discipline a cui ci si collega ; mi chiedevo allora che cosa sarebbe importante rielaborare o affrontare nel campo della g. coi bambini, che cosa nel corso dei 5 anni val la pena di affrontare con una certa serieta', fermo restante il discorso che lei ha ribadito di chiarezza lessicale, di precisazione, di osservazione.

-prof.M. E' una domanda molto difficile. L'insegnamento della matematica, come lei ha detto, non e' distaccato dall'insegnamento della lingua materna e della logica. La mat., soprattutto nella scuola el. ma non solo in essa, fornisce un insieme di mezzi espressivi cosi' come li fornisce lo studio della lingua materna, ne' piu' ne' meno. Il b. viene da noi che gia' conta ecc., e allora noi dobbiamo arricchire la sua capacita' di osservazione, il suo lessico, la sua struttura logica, e dotarlo della sicurezza della manovra della sintassi, cioe' delle regole formali del linguaggio che egli usa. Questo e' analogo a cio' che facciamo quando gli insegnamo a rispettare la grammatica, perche' quando gli insegnamo la grammatica con le eccezioni, coi generi numeri casi ecc., sono regole di sintassi nel senso lato della parola, cioe' di uso degli strumenti espressivi, regole di uso che non sono assolute tuttavia rispecchiano un determinato ambiente culturale che e' e' quello della nostra lingua. Ecco perche' io sono contrario all'insegnamento della lingua straniera nella

scuola elementare, perche' ci sono strutture sottostanti, molto latenti ma molto importanti, che qualificano ogni lingua, che a un bel momento devono essere possedute in modo sicuro.
Esempio tipico: nella mat. e in logica dobbiamo tener presente il discorso delle formule ben formate, cioe' delle successioni di segni che possono avere un significato: non mettendo giu' segni in un modo qualunque scrivo una formula matematica, ad es. ogni parentesi aperta va chiusa, ogni segno di operazione va messo tra due numeri, siano essi esplicitamente dati o madiante parentesi, poi c'e' la regola che il contenuto delle parentesi deve considerarsi un numero detreminato, poi che le moltiplicazioni vanno eseguite prima delle addizioni: sono tutte regole di grammatica di un linguaggio, che sono analoghe alle regole di grammatica del linguaggio italiano; ma una formula ben formata, cioe' un periodo dotato di senso in italiano ha una struttura diversa che in latino, in inglese e in tedesco. La punteggiatura non e' altro che un insieme di regole di formule ben formate, non scritte ma comprensibili, per far capire con la voce un pensiero che viene presentato. Si tratta di regole che strutturano i singoli linguaggi, che a mio parere dovrebbero essere imparate solidamente almeno una volta, perche' a mio parere in un cervello si fa confusione, per ragioni logiche, non solo di addestramento.
In questo ordine di idee l'insegnamento della matematica si riannoda strettamente all'insegnamento della lingua materna, perche' e' un insegnamento di strumenti espressivi, che hanno certe difficolta' ma certe analogie. Le difficolta' sono quelle della convenzionalita' delle espressioni e della sintassi molto rigida, cioe' mentre la lingua materna tollera strappi alla grammatica e alla sintassi, la matematica non li tollera, perche' se io sbaglio anche solo un segno di una formula dico una cosa diversa, oppure se non viene una formula ben formata non dico niente addirittura; ma il problema e' sempre lo stesso, cioe' di conferire degli strumenti espressivi e di insegnare ad utilizzarli rispettando le regole convenzionali ma assolutamente necessarie in quell'ambito, pena il non comunicare nessun messaggio.
In quest'ordine di idee il discorso dell'insegnamento della geometria credo che si possa inquadrare nel discorso piu' ampio dell'insegnamento della matematica, perche' e', come dico sempre, il primo passo della razionalizzazione dei nostri rapporti con gli oggetti esterni, nel senso che , indipendentemebnte dalla nomenclatura, da quelle cose su cui i libri fanno tanto fumo ma non sono importanti, con la geometria noi cominciamo a fare astrazione, a idealizzare se vogliamo (sono i due aspetti di un medesimo atto mentale, perche' quando io idealizzo ad es. questo corpo come un parallelepipedo faccio astrazione dalla natura fisica, chimica, dal colore, dalla posizione): e questo e' un momento in cui la fantasia aiuta molto; ecco perche' io tengo molto alla geometria solida. Non fare geometria significa addirittura tagliar via meta' delle facolta' della nostra testa.
Questo momento di idealizzazione, che rende i corpi quasi trasparenti, perche' noi ne vediamo soltanto diciamo lo scheletro trasparente, e' poi seguito da un momento di concettualizzazione.
Questo e' un secondo passo estremamante educativo, come ha detto la signora prima: il r. vede il triangolo, se la squadra e' trasparente addirittura si fa un'idea del triangolo, poi pero' deve passare al concetto, che e' presentato dalla definizione, non dalla figura.

Ricordo la M. Piera, quando era ragazzina. L'area del triangolo e' meta' del prodotto della base per l'altezza. L'altezza: quante altezze ha il triangolo? Mah. Allora: che cos'e' l'altezza? La perpendicolare calata da un vertica al lato opposto. Bene. Quanti vertici ha un triangolo? Ah, allora il triangolo ha tre altezze. Ecco allora che cominciamo a passare dalla figura, che ci presenta il triangolo cosi' con una sola altezza, al pensare l'area come il prodotto di un lato per l'altezza ad esso relativa, a vedere le cose da un punto di vista piu' alto, perche' le concettualizziamo, non con il linguaggio convenzionale dell'algebra, ma con il linguaggio comune, reso pero' tecnicamente preciso. E questo e' un altro esercizio estremamente valido, perche' abitua il r., ma non solo il r., a non accontentarsi di "questo qui", "quello li'", ma a dire con precisione, in maniera che un altro compagno al telefono sappia ridisegnare la figura che lui descrive.
Qui se vogliamo entra il discorso delle coordinate, perche' il piano cartesiano non e' fatto per divertirci a mettere dei numeri, ma per dare delle informazioni: invece di mandare la figura io mando solo le coordinate, invece di fare un disegno mando un'equazione e l'altro se lo ricostruisce. Il linguaggio un po' alla volta comincia a diventare rigoroso ma molto capace di rappresentare le cose.
In quest'ordine di idee questi tre momenti per me sono estremamente educativi. Ne ho detti due soltanto, ma il terzo e' il piu' importante di tutti. Il primo e' quello dell'<u>idealizzazione</u>, cioe' dell'allenamento a vedere certe cose essenziali negli oggetti, cose naturalmente che interessano la geometria: la fisica si interessera' di altro, la chimica della costituzione chimica della materia, noi per il momento ci occupiamo solo della posizione e della forma.
Secondo passo e' quello della <u>concettualizzazione</u>, che passa attraverso il discorso del gruppo di trasformazioni, cioe' devo dare una concettualizzazione che prescinda dalla mia descrizione personale per essere valida obiettivamente, cioe' devo descrivere l'oggetto in modo che chiunque lo possa riconoscere indipendentemente dagli spostamenti dai rivoltamenti ecc. Ad es. devo def. non questo triangolo, ma una classe di equivalenza di figure che chiamo <u>il</u> triangolo; e nel definire la classe di equivalenza, devo tener presente tutte le possibili trasformazioni delle figure. Ecco allora che il discorso della g. delle t. rientra nel discorso della logica e dell'astrazione: quando definisco descrivo un'intera classe, ed essa e' deteremminata dalle possibili trasformazioni.
Io dico sempre che in sostanza il programma di Erlangen di Klein non fa altro che formalizzare in termini di algebra, cioe' di gruppo di trasformazioni, l'operazione di astrazione delle figure, col risultato che non e' necessario manipolare una figura o un oggetto, puo' darsi che debba girare io intorno all'oggetto per vedere come e' fatto, per vedere di raccogliere tutti gli aspetti i quali verranno poi descritti ai fini della g. indipendentemente dalla posizione che io prendo rispetto all'oggetto. E' la geometria dlle trasformazioni, ne' piu' ne' meno, nella sua essenza. Questo secondo momento e' attaccato al primo ed e' attaccato all'insegnamento del linguaggio comune, perche' io devo educare il r. a spiegarsi in modo ben preciso, sempre lo stesso, logicamente coerente, in maniera da essere capito.
Il terzo momento e' il momento <u>deduttivo</u>. Questo e' il piu'

importante. Dobbiamo capire che anche quando faccio i conti faccio dei ragionamenti, perche' applicare le regole dell'aritmetica non e' altro che dedurre, e in modo assolutamente certo come e' il modo fornito dagli strumenti della matematica. Quindi anche l'aritmetica ci serve pre ragionare, anzi e' deduzione. La g. ci puo' servire per i primi elementi di deduzione. Per me la geometria detta sperimentale o concreta come e' scritto sui programmi non ha sugo, e' roba da pedagogisti. Quando io faccio lo sviluppo del cubo, e il r. capisce che questo segmento deve essere uguale a questo qui perche' quando lo tiro su devono coincidere, questo e' un ragionamento. Si suppone che la figura sia rigida nelle sue parti, che abbia significato il confronto, che si debba ottenere il cubo partendo da quella figura. Quando dico: "devo" ottenere questo, faccio della logica di altissimo livello.
I tre momenti: idealizzazione, concettualizzazione e deduzione, sono i tre momenti formativi, che possono essere realizzati ad ogni istante dello sviluppo mentale, purche' si colgano le occasioni. L'osservazione per es. che cio' che degli oggetti interessa per la geometria non e' ne' il colore, ne' la temperatura, ne' la costituzione chimica, ne' la costituzione fisica, ma solo la forma e la posizione eventualmente rispetto agli altri (questo e' un discorso piu' sottile), e la grandezza, e' un discorso che i ragazzini capiscono. Quando gli insegnamo a fare i poliedri con gli sviluppi, ecco li' un momento veramente formativo.
Il discorso piu'pericoloso e' quello che e' stato impostato da Villani; io gli ho dato ragione, poi mi sono pentito: solidi, superfici, linee. Un certo tipo di ragionamento dice: io ho esperienza solo di solidi, la superficie e' un'astrazione in quanto limite di un solido; la linea e' un'astrazione, in quanto limite di una superficie. E' anche vero. Pero' se un solido e' complicato, il pensare alla superficie come limite del solido comincia a diventare una cosa un po' dura, mentre invece le superfici sulle figure alla lavagna le posso rappresentare in una maniera molto semplice. Una volta aderivo entusiasticamente a questa impostazione, mentre ora ho qualche dubbio, per la possibilita' di illustrare la superficie e per le difficolta' di presentare dei solidi e di ricavare la superficie dal solido. Pero' nei programmi c'e' proprio scritto in quest'ordine: solidi, superfici, linee. Ogni elemento contenuto nei programmi puo' essere utilizzato per fare un lavoro formativo di questo genere, se noi impostiamo il discorso in questo spirito.
La nomenclatura deve essere richiesta giusta, ma in vista del discorso formativo che e' analogo a quello del linguaggio comune, perche' loro devono imparare a chiamare le cose ciascuna col suo nome, con precisione.

-Enrica (racconta di un bambino che voleva che la linea di frazione fosse chiamata segmento di retta)

-prof.M. Tra la confusione e la pignoleria non so che cosa scegliere; e' ancora il discorso dell'arricchimento del lessico... Diventare pignoli puo' essere l'abitudine alla chiarezza del concetto e alla precisione dell'espressione.

-Rosita Anche uscendo dall'ambito matematico, a volte dal ferramenta o in merceria non so chiamare le cose col loro nome, possibile che il merciaio mi sciorini un sacco di termini ...

-prof.M. Sciorinare e' un bellissimo verbo, vorrei domandare a certi annunciatori televisivi se ne conoscono il significato...